دروس في مقياس الجبر 2

Cours d'Algèbre 2

Zouhir Mokhtari

جامعة باتنة 2

z.mokhtari@univ – batna2.dz

March 1, 2022

المحتويات

الفصل الأول

الفضاءات الشعاعية

في هذا الفصل يرمز $(\mathbb{K},+,\times)$ الى $\mathbb{R},\mathbb{C}$ أو أي حقل اخر شريطة ان يكون تبديليا

I الفضاءات الشعاعية و الفضاءات الشعاعية الجزئية

تعريف 1 الفضاء الشعاعي على $\mathbb{K}$ هو مجموعة غير خالية E مزودة بقانونين:

1 قانون تركيب داخلي تجميعي يسمى عموما بالجمع ويرمز له بالرمز " $+$ " وهو بعبارة أخرى تطبيق من $E\times E$ نحو E

2 قانون تركيب خارجي يسمى عموما الجداء الخارجي و يرمز له بالرمز " $\cdot$ " وبصيغة أخرى هو تطبيق من $\mathbb{K}\times E$ نحو E يحققان معا (القانونين + و $\cdot$) الشروط:

- زمرة تبديلية, بحيث نرمز للعنصر الحيادي ب أو 0_E و نرمز لعنصرها الحيادي النظير ل x بالرمز $-x$.
- قانون التركيب الخارجي يجب أن يحقق من أجل كل $x\in E$ و $\alpha,\beta\in\mathbb{K}$

$$\alpha\cdot(\beta\cdot x)=(\alpha\cdot\beta)\cdot x;$$

- من أجل كل $x\in E$ و $\alpha,\beta\in\mathbb{K}$

$$(\alpha+\beta)\cdot x=\alpha\cdot x+\beta\cdot x;$$

- من أجل كل $x,y\in E$ و $\alpha\in\mathbb{K}$

$$\alpha\cdot(x+y)=(\alpha\cdot x)+(\alpha\cdot y)$$

- $\mathbf{1}_{\mathbb{K}}\cdot\mathbf{x}=\mathbf{x}$.

1 خصائص أولية

ليكن E فضاء شعاعي على الحقل $\mathbb{K}$ ليكن $x \in E$ و $\alpha \in \mathbb{K}$ إذن لدينا:

- $\alpha \cdot x = 0_E \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = 0_{\mathbb{K}} \quad \vee \quad x = 0_{\mathbb{E}}$
- $\forall x \in E, \alpha \in K \ , -(\alpha \cdot x) = \alpha \cdot (-x) = (-\alpha) \cdot x$

مثال 1-I

- $\mathbb{K}$ هو فضاء شعاعي على $\mathbb{K}$
- $\mathbb{R}$ هو فضاء شعاعي على $\mathbb{Q}$

2 نعتبر $\mathbb{K}^n$ المجموعة المكونة من العناصر التي تكتب بالشكل $(x_1, x_2, ..., x_n)$ بحيث n عدد طبيعي موجب تماما والمعروفة بالجداء الديكارتي.

لتكن $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ و $x' = (x'_1, x'_2, ..., x'_n)$ عنصرين من $\mathbb{K}^n$ و ليكن $\alpha \in \mathbb{K}$ نعرف القانونين الجمع والجداء بالشكل التالي :

$$x + x' = (x_1 + x'_1, x_2 + x'_2, ..., x_n + x'_n)$$

و

$$\alpha \cdot x = (\alpha \cdot x_1, \alpha \cdot x_2, ..., \alpha \cdot x_n)$$

من السهل أن نتحقق من أن المجموعة $\mathbb{K}^n$ مزودة بالقانونين السابقين تشكل فضاء شعاعيا على الحقل $-\mathbb{K}$.

بصفة عامة كل حقل تبديلي هو فضاء شعاعي على نفسه.

3 نعتبر$V = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ مجموعة الدوال من $\mathbb{R}$ نحو $\mathbb{R}$ المزودة بالقوانين المألوفة, جمع دوال و ضرب الدوال بعدد: $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$ و $(\alpha \cdot f)(x) = \alpha \cdot f(x)$ هي $-\mathbb{K}$ فضاء شعاعي.

نعتبر $V = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ مجموعة الدوال المعرفة من $\mathbb{R}$ نحو $\mathbb{R}$ المزودة بالقوانين المألوفة جمع دالتين و ضرب دالة بعدد:

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$$

و

$$(\alpha \cdot f)(x) = \alpha \cdot f(x)$$

المجموعة المذكورة مزودة بالقانونين تمتع ببنية فضاء شعاعي.

2 الفضاءات الشعاعية الجزئية

في كل ما يلي ما عدا حين يشار لغير ذلك نعتبر E فضاء شعاعيا على الحقل $\mathbb{K}$.

تعريف 2 نقول عن مجموعة ما F انها تشكل فضاء شعاعيا جزئيا من E إذا تحقق:

(i) $\emptyset \neq F \subset E$.

(ii) F تشكل فضاء شعاعيا على الحقل $\mathbb{K}$

لكون اثبات أن F عبارة عن فضاء شعاعي جزئي باستعمال التعريف عملية طويلة هناك طرق أخرى لاثبات أن المجموعة الجزئية F من E هي ايضا تمتع ببنية فضاء شعاعي على نفس الحقل $\mathbb{K}$

نظرية I-1 نقول عن مجموعة جزئية F من E أنها فضاء شعاعي جزئي من E (طبعا على نفس الحقل $\mathbb{K}$) إذا تحققت الشروط التالية:

(i) $F \ni 0_E$

(ii) $\forall x, y \in F : x + y \in F,$

(iii) $\forall x \in F ,\forall \alpha \in \mathbb{K}\ \alpha \cdot x \in F$

التفسير:

F كانت إذا E من جزئيا شعاعيا فضاء تكون F والمسماة الخالية غير E من الجزئية المجموعة بأن تفيد أعلاه التعريف شروط الخارجي. وللجداء الداخلي للجمع بالنسبة مستقرة

توطئة 1:

ليكن E فضاء شعاعيا ولتكن F مجموعة، تكون F فضاء شعاعيا جزئيا من Eإذاوفقط إذا:

(i) $(F, +)$ هي زمرة جزئية من $(E, +)$

(ii) $\forall(\alpha, x) \in \mathbb{K} \times F, \alpha \cdot x \in F$

نتيجة 1-I

تكون المجموعة غير الخالية F فضاء شعاعيا جزئيا من E إذا وفقط إذا حققت:

$$\forall x, y \in F, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}; \quad \alpha \cdot x + \beta \cdot y \in F \tag{1.1}$$

E

البرهان

1 نبدأ بالاستلزام $(\Rightarrow)$

من السهل باستخدام تعريف الفضاء الشعاعي الجزئي إستنتاج الشرط المذكور.

2 من أجل اثبات الإستلزام العكسي يكفي إستعمال الشرط المعطى كما يلي:

- ليكن x و y عنصرين من F من أجل $\alpha = 1$ و $\beta = -1$ نجد $x - y \in F$ وهو الشرط الكافي واللازم لتكون $(F, +)$ زمرة جزئية من $(E, +)$.
- من جهة أخرى, إذا أخذنا $y = 0$ في العلاقة (1), نجد الشرط (ii) من توطئة1

■

مثال 2-I الفضاء E و $\{0_E\}$ فضاء شعاعيان جزئيان من E.

مثال 3-I الستقيمات المارة بالمبدأ وكذاالمستويات المارة بالمبدأ تشكل فضاءات شعاعيه جزئية من $E = \mathbb{R}^3$.

مثال 4-I المجموعة $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x - y + 1 = 0\}$ ليست فضاء شعاعي جزئي من $\mathbb{R}^2$ ذلك لكون $0_{\mathbb{R}^2}$ لا ينتمي اليها.

نتيجة 2-I

تقاطع فضائين شعاعيين جزئيين دوما هو فضاء شعاعي جزئي.

البرهان

نعتبر F_1 و F_2 فضائين شعاعيين جزئيين من E.

أولا $0_E \in F_1$, لأن F_1 فضاء شعاعي جزئي من E وبنفس الطريقة $0_E \in F_2$ و بالتالي ينتج مباشرة $0_E \in F_1 \cap F_2$ و $F_1 \cap F_2$ ليست مجموعة خالية.

من أجل x, y عنصران من $F_1 \cap F_2$ و α, β عنصران من K

- لكون F_1 فضاء شعاعي جزئي من E ينتج $\alpha \cdot x + \beta \cdot y \in F_1$
- لكون F_2 فضاء شعاعي جزئي من E ينتج $\alpha \cdot x + \beta \cdot y \in F_2$

ومنه النتيجة المطلوبة. ■

نتيجة 3-I

تقاطع فضاءات شعاعية جزئية من فضاء شعاعي E هو فضاء شعاعي جزئي من E.

ملاحظة

على العموم اتحاد فضائين شعاعيين جزئيان ليس بالضروره فضاء شعاعي جزئي (ما لم يحتوي احدهما الاخر).
كمثال على ذلك يمكن إعتبارالفضاء الشعاعي $E = \mathbb{R}^2$ و الفضاءان الشعاعيان الجزئيان $\mathcal{D}_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = o\}$ و $\mathcal{D}_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = o\}$.

3 الأسس، العائلات المولدة والعائلات المستقلة

مفهوم التركيبات الخطية:

التركيب الخطي والذي يسمى في أحيان كثيرة أيضا بالمزج الخطي للأشعة $u_1, u_2, ..., u_n$ مع $n \in \mathbb{N}^*$ من فضاء شعاعي E هو الشعاع الذي يمكن كتابته على الشكل $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot u_i$.

العناصر $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n \in \mathbb{K}$ تدعى معاملات التركيب الخطي.

مثال 5-I ليكن $u_1, u_2, ..., u_n$, n شعاع من فضاء شعاعي E دائما يمكننا أن نكتب 0_E على شكل تركيب خطي من هذه الأشعة لأنه يكفي أن نأخذ كل المعاملات تساوي الصفر.

ملاحظة

إذا كان F فضاء شعاعي جزئي من E و $u_1, u_2, ..., u_p \in F$ إذن كل التركيبات الخطية $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i \cdot u_i$ تنتمي الى F.

ترميزات

لتكن مجموعة من الأشعة $u_1, u_2, ..., u_n$ من فضاء شعاعي E نرمز ب $Vect(u_1, u_2, ..., u_n)$ لمجموعةكل التركيبات الخطية الممكنة في الاشعة $u_1, u_2, ..., u_n$ و نكتب

$$Vect(u_1, u_2, ..., u_n) = \left\{ u \in E \mid \exists (\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n) \in \mathbb{K}^n ; u = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot u_i \right\}.$$

مثال 6-I $Vect(0_E) = \{0_E\}$.

تعريف 3 لتكن A مجموعة جزئية من فضاء شعاعي E نقول أن A تولد E أو بصيغة اخرى A مجموعة مولدة لـ E اذا تحققت المساواة

$$Vect(u_1, u_2, ..., u_p) = E$$

يمكن تلخيص ما سبق في العبارة التي تفيد بأن كل شعاع من E هو تركيب خطي في عناصر المجموعة A.

تعريف 4 لتكن A مجموعة جزئية من فضاء شعاعي E نقول أن A مجموعة مستقلة خطيا أو حرة إذا و فقط إذا كان الشعاع المعدوم $\{0_E\}$ تركيب خطي من عناصر A بصفة وحيدة بمعنى آخر:

$$\sum_{i=1}^{p} \lambda_i \cdot u_i = 0_E \Rightarrow \lambda_i = 0$$

ملاحظة

يمكننا أن نستعمل أيضا المصطلحات التالية:

- إذا كانت المجموعة A حرة نقول أيضا أن الأشعة $u_1, u_2, ..., u_p$ غير مرتبطة خطيا
- إذا كانت المجموعة A غير حرة نقول ايضا أن A مرتبطة.

خصائص

1. كل جزء يحوي جزء مولد من E يبقى جزء مولد
2. المجموعة المكونة من شعاع وحيد حرة إذا و فقط إذا كان هذا الشعاع غير معدوم
3. كل مجموعة تحتوي الشعاع المعدوم هي مجموعة مرتبطه.
4. كل مجموعة محتواة في مجموعة حرة هي مجموعة حرة.

تعريف 5

لتكن A مجموعة جزئية من فضاء شعاعي E نقول أن A أساس لـ E إذا كانت حرة ومولدة بصيغة أخرى كل شعاع من E هو تركيبة خطية في عناصر A بطريقة وحيدة و هو ما يعبر عنه رياضيا بـ:

$$\forall u \in F, \exists!(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_p) \in \mathbb{K}^p; u = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \cdot u_i \ ,$$

وحينها السلميات $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_p$ تسمى إحداثيات الشعاع u في الأساس A.

II الفضاءات الشعاعية ذات البعد المنته

تعريف 6

نقول عن فضاء شعاعي أنه ذو بعد منته إذا كان يقبل عائلة مولدة عدد عناصرها منته بصيغة أخرى هو أي فضاء شعاعي مولد بعائلة منتهية من الأشعة يقال أنه ذو بعد منته

نظرية 2-II

في فضاء شعاعي ذو بعد منته E كل الأسس لها نفس العدد من العناصر، هذا العدد يرمز له بالرمز $dim(E)$ و يسمى ببعد الفضاء E لتكن A عائلة من عناصر E ذو البعد المنته n الخصائص التالية متكافئة

1. المجموعة A هي أساس لـ E
2. المجموعة E هي مجموعة مولدة ومستقلة خطيا.
3. المجموعة A هي مجموعة مستقلة خطيا و عدد عناصرها هو n
4. المجموعة A هي مجموعة مولدة و عدد عناصرها هو n

ملاحظة

في فضاء شعاعي ذو بعد n كل الأسس لها نفس عدد العناصر لكن وجب عدم الخلط بين بعد فضاء و عدد عناصر مجموعة فلا نتحدث أبدا عن عدد عناصر الفضاء الشعاعي ولا عن بعد الأساس.

ملاحظة

عمليا نستعمل النظرية السابقة لإثبات أن مجموعة ما A تشكل أساسا للفضاء الشعاعي E.

مثال 7-II

ليكن $u_1(1,2), u_2(2,-1)$ شعاعان من الفضاء الشعاعي $E = \mathbb{R}^2$ على $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. تحقق أن العائلة $A = (u_1, u_2)$ تولد $\mathbb{R}^2$. ماذا يمكن أن نستنتج؟

لإظهار أن A هي عائلة مولدة, نبحث عن عددين حقيقين λ_1, λ_2 بحيث من أجل كل $u(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $u = \lambda_1 \cdot u_1 + \lambda_2 \cdot u_2$. بعد سلسلة حسابات سنجد $\lambda_1 = \frac{1}{5}(x+2y)$, $\lambda_2 = \frac{1}{5}(2x-y)$. هذا يعني أن A تولد $\mathbb{R}^2$.

من جهة أخرى كان يكفي لاثبات ذلك القول بأن A مستقلة خطيا و عدد عناصرها 2 إذن فهي أساس لـ $\mathbb{R}^2$

نتيجة 4-II

كل فضاء شعاعي ذو بعد منته يقبل عددا غي منته من الأسس كل هاته الأسس لديها نفس عدد العناصر.

نتيجة 5-II

ليكن E فضاء شعاعي ذو بعد منته n لدينا:

- كل مجموعة مستقلة خطيا بها على الأكثر n عنصر.
- كل مجموعة مولدة لـ E بها على الأقل n عنصر

نظرية 3-II في فضاء شعاعي ذو بعد منته E كل عائلة مستقلة خطيا (أو مولدة) عدد عناصرها يساوي بعد E هي أساس.

نظرية 4-II كل فضاء شعاعي جزئي F من فضاء شعاعي E ذو بعد منته هو ايضا فضاء ذو بعد منته و لدينا $dim(F) \leq dim(E)$ والمساواة بين الفضائين تحقق حين يتساوى البعدين.

نظرية 5-II ليكن E فضاء شعاعي ذو بعد منته و L مجموعة مستقلة خطيا من E إذن يوجد أساس B لـ E يحوي B.

1 رتبة العائلة المنتهية من الأشعة

تعريف 7 ليكن E فضاء شعاعي على $\mathbb{K}$ و $G = \{v_1, v_2, ..., v_m\}$ مجموعة مكونة من m شعاع من E. رتبة المجموعة G و التي يرمز لها بالرمز $rank(G)$ هي بعد الفضاء الشعاعي الجزئي المولد بها $F = Vect(v_1, v_2, ..., v_m)$:

$$rank(G) = dim(F)$$

خصائص ليكن E فضاء شعاعي على $\mathbb{K}$ و $G = \{v_1, v_2, ..., v_m\}$ عائلة أشعة من E إذن لدينا:

- $0 \leq rank(G) \leq m$.
- إذا كان $dim(E) = n$ (منته) فإن $rank(G) \leq n$.
- $rank(G) = m$ إذا و فقط إذا G مجموعة مستقلة خطيا
- $rank(G) = 0$ إذا و فقط إذا كل أشعة G معدومة

مثال II-8 ليكن $G=\{v_1=(2,3),v_2=(4,2),v_3=(-3,4)\}$ مجموعة جزئية من الفضاء الشعاعي $\mathbb{R}^2$ على حقل الأعداد الحقيقية نحاول تحديد رتبة المجموعة G.
من الواضح أن v_2 و v_3 غير مرتبطين خطيا من جهة ومن جهة أخرى بحل الجملة $\alpha_1\cdot v_1+\alpha_2\cdot v_2+\alpha_3\cdot v_3=0$ نجد $2v_1-v_2-v_3=0$ و منه نتحصل أن العائلة G مرتبطة خطيا . من ما سبق نستنتج أن $Vect(v_1,v_2,v_3)=Vect(v_2,v_3)$ و منه $rank(G)=2$.

III مكمل فضاء شعاعي جزئي

1 المجموع المباشر لفضائين شعاعين جزئيين

كما رأينا سابقا على العموم إتحاد فضائين شعاعيين جزئيين ليس فضاء شعاعيا جزئيا إذن من المفيد أن نجد الفضاء الشعاعي الجزئي الذي يحوي الفضاءيين الشعاعيين الجزئيين معا ومن المفيدأيضا بالخصوص إيجاد أصغرفضاء شعاعي جزئي يحويهما معا (بالطبع الأصغر بمفهوم الإحتواءات).

تعريف 8 ليكن F_1 و F_2 فضائين شعاعين جزئيين من فضاء شعاعي E ، نسمي جمع F_1 مع F_2 ونرمز لها بالرمز F_1+F_2 المجموعة التي تتشكل من العناصر التي يمكن كتابتها على شكل جمع شعاع من F_1 مع شعاع من F_2.

$$F_1+F_2=\{u\in E \mid u=u_1+u_2, u_1\in F_1, u_2\in F_2\}.$$

ملاحظة

يمكن أن نميز الأشعة u من المجموعة F_1+F_2 بـ:

$$u\in F_1+F_2 \Leftrightarrow \exists(u_1,u_2)\in F_1\times F_2 \mid u=u_1+u_2\,.$$

مثال III-9

نعتبر المستقيمين D_1 و D_2 من الفضاء الشعاعي $E = \mathbb{R}^2$ المتقاطعين في المركز يمكن بسهولة إثبات أن $D_1 + D_2 = \mathbb{R}^2$

يمكن القول حسب التعريف أن $F_1 + F_2 = E$ إذا و فقط إذا كان يمكن لأي عنصر من E أن يكتب على شكل مجموع شعاعين من F_1 و F_2.

نتيجة III-6

إذا كان F_1 و F_2 فضائين شعاعيين جزئيين من E فإن $F_1 + F_2$ هو أيضا فضاء شعاعي جزئي من E

البرهان

نعتبر F_1 و F_2 فضاء شعاعيان جزئيان من E

- أولا $0_E \in F_1$ لأن F_1 فضفاء شعاعي جزئي من E ولنفس السبب $0_E \in F_2$ و منه $0_E = 0_E + 0_E \in F_1 + F_2$ ينتج من ما سبق أن المجموعة $F_1 + F_2$ ليست خالية.

- ليكن x, y عنصرين من المجموعة $F_1 + F_2$ و α, β عنصرين من الحقل $\mathbb{K}$

← لكون $x \in F_1 + F_2$ من التعريف يوجد عنصرين $x_1 \in F_1$ و $x_2 \in F_2$ يحققان $x = x_1 + x_2$ ينتج من المعطيات $\alpha \cdot x = \alpha \cdot (x_1 + x_2) = (\alpha \cdot x_1) + (\alpha \cdot x_2) \in F_1 + F_2$ لأن $\alpha \cdot x_1 \in F_1$ و $\alpha \cdot x_2 \in F_2$.

← نفس الإستدلال بالنسبة للعنصر $y \in F_1 + F_2$ ينتج $\beta \cdot y = \beta \cdot (y_1 + y_2) = (\beta \cdot y_1) + (\beta \cdot y_2) \in F_1 + F_2$, لأن $\beta \cdot y_1 \in F_1$ و $\beta \cdot y_2 \in F_2$ مع $y = y_1 + y_2$

- في الأخير نستنتج أن $\alpha \cdot x + \beta \cdot y = (\alpha \cdot x_1 + \beta \cdot y_1) + (\alpha \cdot x_2 + \beta \cdot y_2) \in F_1 + F_2$

ما سبق يبين أن المحموعة F_1 و F_2 تمتع ببنية فضاء شعاعي. ■

نتيجة 7-III

إذا كان F_1 و F_2 فضائين شعاعيين جزئيين من الفضاء الشعاعي E فإن F_1+F_2 هو أصغر فضاء شعاعي جزئي من E يحوي F_1 و F_2

البرهان

- بداية نبين المجموعة F_1+F_2 تحوي كلا من F_1 و F_2.

← أي عنصر $u_1 \in F_1$ يمكن ان يكتب على الشكل $u_1 = u_1 + 0_E$ مع u_1 ينتمي إلى F_1 و 0_E ينتمي إلى F_2 لكون F_2 فضاء شعاعي جزئي من E. وهو ما يعني أن u_1 ينتمي إلى F_1+F_2.

← نفس الشيء بالنسبة لعناصر F_2 فنستطيع حينها القول أن F_2 و F_1 هي جزء من F_1+F_2.

- الخطوة لثانية من البرهان تتمثل في تبيان كون F_1+F_2 هو أصغر فضاء شعاعي جزئي من E يحوي الفضائين معا.

← نفرض H فضاء شعاعي جزئي يحوي F_1 و F_2 معا

← لكون $H \subset F_1$ إذن ينتج أن اي عنصر من F_1 هو عنصر من H.

← لنفس الأسباب $u_2 \in F_2$ إذن $u_2 \in H$.

← بما أن H هو فضاء شعاعي إذن $F_1+F_2 \subset H$.

كل ما سبق يبين ان F_1+F_2 هو أصغر فضاء شعاعي جزئي من E يحوي F_1 و F_2 ■

2 الجمع المباشر لفضائين شعاعيين جزئيين

تعريف 9

ليكن F_1 و F_2 فضاء شعاعيان جزئيان من الفضاء الشعاعي E نقول عن المجموع F_1+F_2 أنه جمع مباشر إذا كان كل شعاع من F_1+F_2 يمكن أن يتحلل بصفة وحيدة كمجموع عنصر من F_1 مع عنصر من F_2

ترميز

لما يكون جمع F_1 و F_2 جمعا مباشرا نكتب $F_1+F_2 = F_1 \oplus F_2$.

ملاحظة

يمكن أن نصف الجمع المباشر للفضاءات الشعاعيي بالتكافؤ التالي

$$F_1 + F_2 \text{ جمع مباشر} \Leftrightarrow F_1 \cap F_2 = \{0_E\}$$

البرهان

- نفرض أن الجمع $F_1 + F_2$ هو جمع مباشر و $u \in F_1 \cap F_2$ من جهة يمكن أن نكتب $u = u + 0_E$ مع $u \in F_1$ و $0_E \in F_2$ و من جهة أخرى $u = 0_E + u$ مع $0_E \in F_1$ و $u \in F_2$.

- في المقابل, نفرض أن $F_1 \cap F_2 = \{0_E\}$ و نثبت أن المجموع $F_1 + F_2$ مباشر. نفرض أنه لدينا

$$u = u_1 + u_2 = u_1' + u_2' \,,$$

مع $u_1, u_1' \in F_1$ و $u_2, u_2' \in F_2$. إذن $u_1 - u_1' = u_2' - u_2$. بما أن $u_1 - u_1' \in F_1$ و $u_2' - u_2 \in F_2$, الشعاع $v = u_1 - u_1' = u_2' - u_2 \in F_1 \cap F_2 = \{0_E\}$. الذي يستلزم أن $u_1 = u_1'$ و $u_2 = u_2'$. و منه كتابة u في (2) وحيدة التي تعني أن المجموع $F + G$ مباشر.

■

مثال 10-III

لتكن H مجموعة جزئية من الفضاء الشعاعي E يمكن أن نعرف الفضاء الشعاعي المولد بالمجموعة H على أنه مجموع المستقيمات المولدة بعناصر H (بإعتبار أن الفضاءات الشعاعية المولدة بعنصر واحد تسمي مستقيمات).
كمثال إذا إعتبرنا الأشعة $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,1,0)$, $e_3 = (0,0,1)$ و $u = (1,1,0)$ من $\mathbb{R}^3$
يتضح لنا بسهولةأن الفضاء الشعاعي المولد ب $\{e_1, e_2, e_3\}$ هو الفضاءالكلي $\mathbb{R}^3$ في حين أن الفضاء الشعاعي المولد بالأشعة $\{e_1, e_2, u\}$ هي مستوي من الفضاء.
من جهة أخرى يمكن القول الفضاءات الجزئية المولدة ب $\{e_1, e_2\}$ و $\{e_3\}$ همجموعة جمعا مباشرا في حين أن الفضاءات الجزئية المولدة ب $\{e_1, e_2\}$ و ب $\{e_2, u\}$ ليست مجموعة جمعا مباشرا.

مثال 11-III

مستقيمين من المستوي $\mathbb{R}^2$ متقاطعين في المركز مجموعين جمع مباشر لأن تقاطعهماهو الشعاع المعدوم $(u = 0_{\mathbb{R}^2})$

مثال III-12 مستويين متقاطعين من الفضاء $\mathbb{R}^3$ لا يمكن أن يكونا في جمع مباشر لأن تقاطعهما لا يمكن أن يقول من مستقيم.

3 الفضاءات الجزئية المكملة

تعريف 10 ليكن F_1 و F_2 فضائين شعاعيين جزئيين من E نقول عن F_1 و F_2 أنهما متكاملان في E أو أن أحدهما يكمل الأخر إذا وفقط اذا المجموع F_1+F_2 مباشرا و يساوي E.

ملاحظة

يمكن توصيف الفضاءات الجزئية المتكاملة بـــ:

$$F_1 \text{ و } F_2 \text{ متكاملان} \Leftrightarrow F_1\cap F_2=\{0_E\} \text{ و } F_1+F_2=E$$

بمعنى آخر:

$$E=F_1\oplus F_2$$

نتيجة III-8

ليكن F_1 و F_2 فضائين شعاعيين جزئيين من E إذن لدينا:

$$F_1 \text{ و } F_2 \text{ متكاملان} \Leftrightarrow \forall u\in E, \exists!(u_1,u_2)\in F_1\times F_2 \mid u=u_1+u_2\,.$$

ملاحظة

وجب التذكير على أن مفهومي الجمع المباشر للفضاءات والفضاءات المتكاملة مفهومين مختلفين قليلا .
فإذا إعتبرنا شعاعين متقاطعين D_1 و D_2 من الفضاء الشعاعي $E=\mathbb{R}^3$ مع $D_1\cap D_2=\{0_E\}$ و أخذنا P المستوى في الفضاء الذي يحويهما معا (من الواضح أن $D_1+D_2=P$). النتيجتين السابقتين تعني أن مجموعهم مباشر و يساوي بالضبط المستوى $P=D_1\oplus D_2$. إذن D_1 و D_2 متكاملين فقط في P وليس في كل الفضاء.

ملاحظة

على العموم الفضاء المكمل ليس وحيدا بصيغة أخرى من أجل فضاء شعاعي جزئي F_1 من E يمكن أن نجد الكثير من المكملات المختلفة F_2 بحيث $F_1 \oplus F_2 = E$.

مثال 13-III

ليكن D_1، D_2 و D_3 ثلاث مستقيمات من $E = \mathbb{R}^2$ متقاطعة في المركز إذن من السهل أن نجد $D_1 \oplus D_2 = D_1 \oplus D_3 = \mathbb{R}^2$ وهذا يعني أن كلا من D_2 و D_3 مكملان لـ D_1.

وجود الفضاء المكمل في حالة البعد المنته

نظرية الأساس غير المكتمل تنص على أنه في فضاء شعاعي ذو بعد منته أي عائلة حرة يمكن أن تكمل إلى أساس لهذا الفضاء مباشرة نستنتج وجود مكملات لأي فضاء شعاهي جزئي.

نتيجة 9-III

نتيجة:

ليكن E فضاء شعاعي ذو بعد منته وF_1 فضاء شعاعي جزئي من E إذن يوجد فضاء شعاعي جزئي F_2 بحيث

$$E = F_1 \oplus F_2 \quad \text{و} \quad dim(E) = dim(F_1) + dim(F_2)\,.$$

نظرية 6-III

(صيغة قراصمان)

ليكن F_1 و F_2 فضائين شعاعيين جزئيين من E مع $F_1 + F_2$ ذو بعد منته

$$dim(F_1 + F_2) = dim(F_1) + dim(F_2) - dim(F_1 \cap F_2)\,.$$

نظرية 7-III

ليكن E فضاء شعاعي ذو بعد منته إذن الشروط التالية متكافئة:

(i) $E = F_1 \oplus F_2$.

(ii) $F_1 \cap F_2 = \{0_E\}$ و $dim(E) = dim(F_1) + dim(F_2)$.

(iii) $E = F_1 + F_2$ و $dim(E) = dim(F_1) + dim(F_2)$.

IV تمارين

01

من أجل كل $x, y \in \mathbb{N}$ نعرف العلاقة "الجمع" بـ
$x + y$ هوالأكبر بين x و y أي $x + y = max(x, y)$
و العلاقة "الجداء في عدد حقيقي بالشكل التالي
$\alpha \times x = \alpha x$ من أجل كل $\alpha \in \mathbb{R}$ و $x \in \mathbb{N}$.
هل المجموعة $\mathbb{N}$ مزودة بالقانونين السابقين تشكل فضاء شعاعيا؟

02

من أجل $(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$, نعرف العلاقة "الجمع" بـ :

$$(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2)$$

و العلاقة "الجداء في عدد" بـ : من أجل كل $\alpha \in \mathbb{R}$ و $x \in \mathbb{R}^2$.

$$\alpha \times (x_1, x_2) = (\alpha x_1, 0)$$

هل $\mathbb{R}^2$ مزودة بالقانونين السابقين فضاء شعاعي؟

03

ليكن F الفضاء الشعاعي المكون من كل الدوال $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ و $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ بين أي من المجموعات التالية تشكل فضاءات شعاعية جزئية من F مع تعليل الأجوبة:

1 $E = \{f \in F | f(-x) = f(x), \forall x \in \mathbb{R}\}$, مجموعة الدوال الزوجية

2 $E = \{f \in F | f(-x) = -f(x), \forall x \in \mathbb{R}\}$, مجموعة الدوال الفردية

3 $E = \{f \in F | f(0) = 0\}$.

04

ليكن E مجموعة الدوال $f \in F$ التي تحقق المعادلة

$$f'' = 0.$$

أثبت أن E فضاء جزئي من F.

05

ليكن V فضاءشعاعي على حقل K مع E_1 و E_2 فضائين شعاعيين جزئيين أعط مثال تبين فيه أن $E_1 \cup E_2$ عموما لا يمكن أن يكون فضاء جزئيا من V.

06

أظهر أن في الفضاء $\mathbb{R}^3$ الأشعة $x = (1, 1, 0), y = (0, 1, 2)$, و $z = (3, 1, -4)$ غير مرتبطين خطيا

07

ليكن $p(x) = x^2 + 2x - 3$ و
=x p(x)
2+2x-3, q(x) = 42x + $3x - {}^2$ و $r(x) = ax^2 - 1$. جد قيمة ل a بحيث المجموعة $\{p, q, r\}$ تكون غير مرتبطة خطيا
ليكن $p(x) = x^2 + 2x - 3, q(x) = 2x^2 - 3x + 4$ و $r(x) = ax^2 - 1$. جد قيمة لـ a بحيث تكون المجموعة $\{p, q, r\}$ غير مرتبطة خطيا

08

ليكن $u = (1, -1, 3), v = (1, 0, 1)$, و $w = (1, 2, c)$ بحيث $c \in \mathbb{R}$. جد قيم لc من أجلها المجموعة $\{u, v, w\}$ تعرف أساس في $\mathbb{R}^3$.

09

ليكن $\mathbb{P}_2[X]$ الفضاء الشعاعي لكثرات حدود الأقل أو تساوي 2 و $F=\{P_1,P_2,P_3\}$ بحيث:

$$P_1(X)=X^2, P_2(X)=(X-1)^2, P(X)=(X+1)^2$$

أثبت أن F تمثل أساس ل$\mathbb{P}_2[X]$. إستنتج عبارة كثير الحدود $Q(X)=12$ في هذا الأساس.

10

ليكن $\mathbb{R}^3$ فضاء شعاعي على الحقل $\mathbb{R}$, و ليكن $G=[\{(1,1,0),(0,0,1),(1,1,1)\}]$ فضاء شعاعي جزئي من $\mathbb{R}^3$. لتكن المجموعة F معرفة كما يلي:

$$F=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3/2x+y-z=0\right\}.$$

- أثبت أن F فضاء شعاعي جزئي من $\mathbb{R}^3$.
- جد أساس لكل من: $F\cap G, F+G, G, F$, و أعط بعدهم.
- هل $\mathbb{R}^3=F\bigoplus G$؟