Université de Batna 2 Département de Maths-Info

Série d'exercices : **Algèbre1**

Chapitre 1 : **Notions de logique (Suite)**

Exercice 9

1. Par l'absurde, démontrer qu'un rectangle a pour aire $170m^2$. Montrer que sa longueur est supérieure à $13m$.
2. Par l'absurde, démontrer que si n est le carré d'un nombre entier non nul alors $2n$ n'est pas le carré d'un nombre entier.
3. $\sqrt{2}$ est un nombre irrationnel (écrire $\sqrt{2}$ sous forme d'une fraction irréductible $\frac{p}{q}$ puis discuter la parité de p et q).
4. Soit a un réel. Si a^2 n'est pas un multiple entier de 16,alors $\frac{a}{2}$ n'est pas un entier pair.
5. A l'aide d'un raisonnement par contraposé, démontrer que Si $\forall \varepsilon > 0; \, a \leq \varepsilon$ alors $a = 0 \quad (a \in \mathbb{R})$.
6. Soit $p_1, p_2, ..., p_r$, r nombres premiers.
   Montrer que l'entier $N = (p_1 \times p_2 \times ... \times p_r) + 1$ n'est divisible par aucun des entiers $p_i; \, i \in \{1, ..., r\}$.
7. Utiliser la question précédente pour montrer par l'absurde qu'il existe une infinité de nombres premiers.

Exercice 10

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'applications de l'ensemble $\mathbb{N}$ dans lui-même. On définit une application f de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ en posant $f(n) = f_n(n) + 1$. Démontrer qu'il n'existe aucun $p \in \mathbb{N}$ tel que $f = f_p$.

Exercice 11

Montrer

1. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}\,; \forall n \in \mathbb{N}^*.$
2. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\,; \forall n \in \mathbb{N}^*.$

Exercice 12

Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 4$ et $u_{n+1} = \frac{2u_n^2-3}{u_n+2}$

1. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} : u_n > 3$.
2. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} : u_{n+1} - 3 > \frac{3}{2}(u_n - 3)$.
3. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} : u_n \geq (\frac{3}{2})^n + 3$
4. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle convergente ?