Université de Batna 2 Département de Maths-Info

Série d'exercices : **Algèbre1**

Chapitre 2 : **Ensembles et applications**

Exercice 1
Dans une classe de 30 élèves, tous font au moins une des deux langues : allemand ou espagnol. 18 font allemand et 19 font espagnol. Combien font les deux langues ?

Exercice 2
On appelle différence symétrique de deux sous-ensembles A et B de E le sous-ensemble :

$$A \triangle B = (A \cap B^c) \cup (B \cap A^c).$$

a. Déterminer $A \triangle \emptyset$; $A \triangle E$ et $A \triangle A$.
b. Montrer que $A \triangle B = B \triangle A$ et $(A \triangle B) \triangle C = A \triangle (B \triangle C)$.

Exercice 3
A et B étant des parties d'un ensemble E, démontrer les lois de Morgan :

$$A^c \cup B^c = (A \cap B)^c \text{ et } A^c \cap B^c = (A \cup B)^c.$$

Exercice 4
Montrer que si F et G sont des sous-ensembles de E :

$$F \subset G \Leftrightarrow F^c \cup G = E$$

.
En déduire que :

$$F \subset G \Leftrightarrow F \cap G^c = \emptyset.$$

Exercice 5

a. Soit $A = \{a_1, a_2, a_3\}$ et $B = \{b_1, B_2, b_3, B_4\}$. Ècrire le produit cartésien $A \times B$. Quel est le nombre de parties de $A \times B$?
b. Soit E un ensemble à n éléments. Quel est le nombre d'éléments de E^p ? Quel est le nombre de parties de E^p ?

Exercice 6
On définit les cinq ensembles suivants :

$$\begin{aligned}
A_1 &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x+y<1\} \\
A_2 &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; |x+y|<1\} \\
A_3 &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; |x|+|y|<1\} \\
A_4 &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x+y>-1\} \\
A_5 &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; |x-y|<1\}
\end{aligned}$$

a. Représenter ces cinq ensembles.
b. En déduire une démonstration géométrique de

$$[(|x+y|<1)\wedge(|x-y|<1)] \Leftrightarrow (|x|+|y|<1).$$

Exercice 7
Soient E et F deux ensembles, $f : E \to F$ une application.

a. Démontrer que $\forall A, B \in \mathcal{P}(E)$ on a :
   1. $(A \subset B) \Rightarrow (f(A) \subset f(B))$,
   2. $(f(A) \subset f(B)) \not\Rightarrow (A \subset B)$,
   3. $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$,
   4. $f(A) \cap f(B) \not\subseteq f(A \cap B)$,
   5. $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$,
   6. $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$,

b. Démontrer que $\forall A, B \in \mathcal{P}(F)$ on a :
   1. $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$,
   2. $f^{-1}(F \setminus A) = E \setminus f^{-1}(A)$.

Exercice 8
Parmi les applications suivantes, déterminer les injections, les surjections et les bijections :

$$\begin{array}{rcl} f_1 : \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array} \qquad \begin{array}{c} f_2 : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^2 \end{array} \qquad \begin{array}{c} f_3 : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \\ z \mapsto z^2 \end{array} \qquad \begin{array}{c} f_4 : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \\ n \mapsto 2n \end{array} \qquad \begin{array}{c} f_5 : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \\ n \mapsto \begin{cases} 1; & n \text{ pair}, \\ 0; & n \text{ impair}. \end{cases} \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} f_6 : \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & x+y \end{array} \qquad \begin{array}{c} f_7 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ (x,y) \mapsto (x+y, x-y) \end{array} \qquad \begin{array}{c} f_8 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ (x,y) \mapsto (x+y, x^2-y^2) \end{array}$$