Université : BATNA 2
Département du Socle Commun en Maths et Informatique
Module : analyse 1

TD 3 "Les Suites de Nombres Réels"

Exercice 1 : (Suites convergentes)

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on pose $U_n = \dfrac{2n+1}{n}$

1. Montrer, en utilisant la définition, que $\lim\limits_{n\to\infty} U_n = 2$
2. Est ce que la suite U_n est convergente. (Justifier)
3. Utiliser d 'autre méthode pour démontrer le résultat de la question 1.

exercice 2 :(Suites géométriques)

1. Soit U_n une suite telle que $U_n \neq 0$ pour tout n, en plus, elle est convergente vers zéro. Montrer que $\dfrac{1}{U_n}$ est divergente. Formuler ce résultat littérairement.
2. Soit $a \in \mathbb{R}$

   2-1. Montre que si $|a| < 1$ alors $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = 0$. Formuler ce résultat littérairement.

   2-2. On suppose que $|a| > 1$. Posons $b = \dfrac{1}{a}$. Montrer que $\lim\limits_{n\to\infty} b^n = 0$, puis déduire que a_n est divergente.

   2-3. Etudier la nature de a_n dans le cas oú $|a| = 1$.

   2-4. Application : Etudier la nature des suites $2^n, (-3)^n, \dfrac{1}{2^n}$.

exercice 3 :(Application du critére des suites monotones)

1. Soit A l 'ensemble des valeurs d 'une suite croissante majorée $(U_n)_{n\geq n_0}$ avec $n_0 \in \mathbb{N}$. Montrer que $\sup A = \lim\limits_{n\to\infty} U_n$ et $\inf A = U_{n_0}$.

   Application : Soit $A = \{2 - \dfrac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$. Trouver $\sup A$ et $\inf A$ s 'ils existent.
2. Enoncer un résultat analogue sur les suites décroissantes minorées.
3. Est ce qu 'on peut utiliser cette méthode pour calculer $\sup\{\cos n; n \in \mathbb{N}^*\}$ et $\inf\{\cos n; n \in \mathbb{N}^*\}$. (Justifier).

exercice 4 :(Critère de Cauchy)

1. Donner la définition mathématique d 'une suite qui n 'est pas une suite de Cauchy.

2. Montrer que la suite (U_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par $U_n = 1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n}$ n 'est pas une suite de Cauchy.

   (Indication : Montrer que pour tout $N \geq 1$ on a $U_{2N} - U_N \geq \frac{1}{2}$)

exercice 5 :(Nature des suites)

Etudier la nature des suites suivantes :

1. La suite dfinie par
$$U_n = \begin{cases} n & \text{si } n = 3k \\ \frac{1}{n} & \text{si } n = 3k+1 \\ \frac{1}{n+3} & \text{si } n = 3k+2 \end{cases}$$
2. La suite dfinie par
$$V_n = \begin{cases} \frac{1}{2n+1} & \text{si } n \text{ n est pair} \\ \frac{1}{n^2+1} & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$
3. Les suites : $(\cos n)$, $(\frac{\cos n}{n+1})$, $((-1)^n(\frac{\cos n}{n+1}+1))$, $(\frac{\cos n}{n+1}+\frac{\sin n}{n^2+1})$ et $((-1)^n+\frac{\cos n}{n+1})$

exercice 6 :(Suite valeur absolue)

1. Montrer que :

   La convergence de U_n vers l $\Longrightarrow$ La convergence de $|U_n|$ vers $|l|$
2. Considérons les suites V_n et W_n définies pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $V_n = (-1)^n$ et $W_N = \dfrac{(-1)^n \cos n}{n}$

   2-1. Etudier la nature de (V_n) , (W_n) et de $(|V_n|)$ et de $(|W_n|)$

   2-2. Que peut on déduire.
3. On suppose que $(|U_n|)$ est convergente vers 0.

   3-1. Montrer que la suite (U_n) est convergente vers 0.

   3-2. Que peut on déduire.

   3-3. Application : Etudier la nature de la suite $\dfrac{(-1)^n}{n}$
4. Montrer que si $(|U_n|)$ est divergente alors (U_n) est divergente.

exercice 7 :(Un critére de divergence)

On suppose que $U_n \leq V_n$ pour tout n.

1. Montrer que si $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = +\infty$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n = +\infty$
2. Si U_n est convergente ou elle est divergente de type limite n 'existe pas que peut on dire sur la nature de (V_n) .

3. Si $\lim_{n \to +\infty} V_n = -\infty$ que peut on dire sur la nature de (U_n) .

exercice 8 :(Suites récurrentes)

Soit f la fonction d 'efinie sur $[0, 1]$ par $x \mapsto \dfrac{x^2}{2 - x^2}$.

On considére la suite $(U_n)_{n \geq 0}$ définie par $U_0 \in [0, 1]$ et la relation de récurrence $U_{n+1} = \dfrac{U_n^2}{2 - U_n^2}$

1. Montrer que, pour $x \in [0, 1[, 0 \leq f(x) \leq x < 1$.
2. En déduire que $0 \leq U_n < 1$ puis que (U_n) est décroissante.
3. La suite (U_n) a-t-elle une limite et si oui laquelle ?

exercice 9 :(Pour l 'etudiant)

On considère la suite (U_n) définie par $U_0 > 0$ et $U_{n+1} = \dfrac{U_n}{2 + 4U_n^3}$

1. Montrer que (U_n) est décroissante minorée. Que pouvez-vous en déduire ?
2. Montrer par récurrence que, pour tout $n \geq 0$, $0 < U_n \leq \dfrac{U_0}{2^n}$. Que pouvez-vous en déduire ?