Chapitre 1

Notion de logique

1.1 Logique

1.1.1 Assertion

Définition 1.1. *Une assertion P (ou une proposition) est une phrase soit vraie, soit fausse, pas les deux en même temps.*

Notation 1.1. *Une table de vérité associe à l'assertion P les deux possibilités : vrai (V) ou faux (F) :*

P
V
F

Exemple 1.1.
1. *1+2=3.*
2. *3 est négatif.*
3. *Quelle heure est-il ?*
4. *x+y=z.*

1) est une assertion vraie et 2) est une assertion fausse. 3) et 4) ne sont pas des assertions.

1.1.2 Les opérateurs logique

On peut effectuer sur les propositions des opérations logiques : et, ou, négation (non), implication, équivalence. Ces opérations sont définies par leur tableau de vérité.

L'opérateur logique ≪ *et* ≫

Étant données deux propositions (P) et (Q) on appelle conjonction de ces deux propositions la proposition (P et Q) notée aussi (p ∧ Q) qui est vraie si et seulement si (P) et (Q) sont tous les deux vrais. L'assertion (P ∧ Q) est fausse sinon.
On résume ceci en une table de vérité :

P	Q	$P \wedge Q$
V	V	V
F	F	F
V	F	F
F	V	F

Exemple 1.2. *L'assertion* $[(1+2=3) \wedge (3$ *est négatif* $)]$ *est fausse.*

L'opérateur logique ≪ *ou* ≫

Étant données deux propositions P et Q on appelle disjonction de ces deux propositions la proposition (P ou Q) notée aussi (P ∨ Q) qui est vraie si et seulement si l'une au moins est vraie.

On résume ceci en une table de vérité :

P	Q	$P \vee Q$
V	V	V
F	F	F
V	F	V
F	V	V

Exemple 1.3. *L'assertion* $[(1+2=3) \vee (3$ *est négatif*$)]$ *est vraie.*

La négation ≪ *non* ≫

La négation d'une proposition (P) se note (non P) ou ($\overline{P}$), qui est vraie si P est fausse, et fausse si P est vraie.

P	$\overline{P}$
V	F
F	V

Exemple 1.4. *Si* P *:* $1+2=3$ *est vraie alors* $\overline{P}$ *:* $1+2 \neq 3$ *est fausse.*

L'implication ≪$\Longrightarrow$≫

La définition mathématique est la suivante :

L'assertion $(\overline{P} \vee Q)$ est notée $(P \Longrightarrow Q)$

Sa table de vérité est donc suivante :

P	Q	$\overline{P}$	$\overline{P} \vee Q (P \Longrightarrow Q)$
V	V	F	V
F	F	V	V
V	F	F	F
F	V	V	V

Exemple 1.5.
1. $0 \leq x \leq 9 \Longrightarrow \sqrt{x} \leq 3$. *Vrais.*
2. *Il pleut, alors je prends mon parapluie. Vraie c'est une conséquence.*

L'équivalence ≪$\Longleftrightarrow$≫

L'équivalence est définie par :

$(P \Longleftrightarrow Q)$ est l'assertion $[(P \Longrightarrow Q)$ et $(Q \Longrightarrow P)]$.

On dira (P *équivalent à* Q) ou (P *si et seulement si* Q). Cette assertion est vraie lorsque P et Q sont vraies ou lorsque P et Q sont fausse. Sa table de vérité est donc suivante :

P	Q	$\overline{P}$	$\overline{Q}$	$P \Longrightarrow Q(\overline{P} \vee Q)$	$Q \Longrightarrow P(\overline{Q} \vee P)$	$(P \Longrightarrow Q) \wedge (Q \Longrightarrow P)(P \Longleftrightarrow Q)$
V	V	F	F	V	V	V
F	F	V	V	V	V	V
V	F	F	V	F	V	F
F	V	V	F	V	F	F

Exemple 1.6.

Proposition 1.1. *Soient P, Q et R trois assertions. Nous avons les équivalences suivantes :*

1. $(P \wedge Q) \Longleftrightarrow (Q \wedge P)$ *(commutativité de et).*
2. $(P \vee Q) \Longleftrightarrow (Q \vee P)$ *(commutativité de ou).*
3. $(\overline{P \wedge Q}) \Longleftrightarrow (\overline{P} \vee \overline{Q})$.
4. $\overline{(P \vee Q)} \Longleftrightarrow (\overline{P} \wedge \overline{Q})$.
5. $\overline{\overline{P}} \Longleftrightarrow P$.
6. $(P \wedge P) \Longleftrightarrow P$.
7. $(P \vee P) \Longleftrightarrow P$.
8. $[(P \wedge Q) \wedge R] \Longleftrightarrow [P \wedge (Q \wedge R)]$*(associativité de et).*
9. $[(P \vee Q) \vee R] \Longleftrightarrow [P \vee (Q \vee R)]$ *(associativité de ou).*
10. $[(P \wedge Q) \vee R] \Longleftrightarrow [(P \vee Q) \wedge (P \vee R)]$ *(distributivité de et par rapport à ou).*
11. $[(P \vee Q) \wedge R] \Longleftrightarrow [(P \wedge Q) \vee (P \wedge R)]$ *(distributivité de ou par rapport à et).*
12. $\overline{(P \Longrightarrow Q)} \Longleftrightarrow (P \wedge \overline{Q})$.
13. $(P \Longrightarrow Q) \Longleftrightarrow (\overline{Q} \Longrightarrow \overline{P})$ *(principe de la contraposition).*
14. $[(P \Longrightarrow Q) \wedge (Q \Longrightarrow R)] \Longrightarrow (P \Longrightarrow R)$ *(transitivité de l'implication).*
15. $(P \Longleftrightarrow Q) \Longleftrightarrow (P \Longrightarrow Q \wedge Q \Longrightarrow P)$.
16. $[P \wedge (P \Longrightarrow Q)] \Longrightarrow Q$.

Preuve 1.1. *On démontre la proposition (12).*

P	Q	$\overline{Q}$	$P \Longrightarrow Q$	$\overline{P \Longrightarrow Q}$	$P \wedge \overline{Q}$	$\overline{(P \Longrightarrow Q)} \Longleftrightarrow (P \wedge \overline{Q})$
V	V	F	V	F	F	V
F	F	V	V	F	F	V
V	F	V	F	V	V	V
F	V	F	V	F	F	V

1.1.3 Quantificateurs

En mathématiques, on utilise, souvent, des expressions de la forme : "pour tout...", "quelque soit...", "il existe au moins...", "il existe un un seul...", ... Ces expressions précisent comment les éléments d'un ensemble peuvent vérifier une certaine propriété. Ces expressions sont appelées les quantificateurs.

On distingue deux types de quantificateurs :

Le quantificateur universel $\ll \forall \gg$

L'expression " pour tout x de E tel que P(x) " s'écrit mathématiquement "$\forall x \in E,\ P(x)$" pour exprimer que l'assertion P(x) est vraie pour tous les éléments x de E.

Exemple 1.7. *P(x) : La fonction f est nulle pour tous $x \in \mathbb{R}$ devient :*

$$P(x) : \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = 0.$$

Le quantificateur existentiel $\ll \exists \gg$

L'expression " Il existe x de E tel que P(x) " s'écrit mathématiquement "$\exists x \in E,\ P(x)$" pour exprimer que l'assertion P(x) est vraie pour au moins un x de E.

Exemple 1.8. *P(x) : La fonction f s'annule en x_0 devient :*

$$P(x) : \exists x_0 \in \mathbb{R},\ f(x_0) = 0.$$

Remarque 1.1. *L'expression " Il existe un seul x de E tel que P(x) " c'est à dire un unique x, s'écrit mathématiquement "$\exists! x \in E,\ P(x)$" pour exprimer que l'assertion P(x) est vraie pour une valeur unique x de E.*

Remarque 1.2. *L'ordre des quantificateurs est très important par exemple les deux phrases logiques*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x + y > 0 \text{ et } \exists y \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, x + y > 0$$

sont différentes. La première est vraie car y peut dépendre de x (y=1-x).Par contre la seconde est fausse (x=-y).

La négation des quantificateurs

Soit P (x) une proposition,

1. La négation de $\forall x \in E, P(x)$ est : $\exists x \in E, \overline{P(x).}$
2. La négation de $\exists x \in E, P(x)$ est : $\forall x \in E, \overline{P(x).}$

Exemple 1.9. *1. La négation de* $(\forall x \in [1, +\infty[,\ x^2 \geq 1)$ *est :* $(\exists x \in [1, +\infty[,\ x^2 <)1.$

2. La négation de $(\forall x \in \mathbb{R}, \exists y > 0 : x + y > 0)$ *est :* $(\exists x \in \mathbb{R}, \forall y > 0 : x + y \leq 0).$

1.2 Méthodes de raisonnement

Pour montrer que $(P \Longrightarrow Q)$ est vraie on peut utiliser les méthodes classique de résonnements suivante :

1.2.1 Raisonnement direct

On suppose que P est vraie et on démontre que Q est vraie aussi.

Exemple 1.10. *Montrons que pour* $n \in \mathbb{N}$ *si* n *est pair* $\Longrightarrow n^2$ *est pair. On suppose que* n *est pair, i.e.,* $\exists k \in \mathbb{N},\ n = 2k$ *donc*

$$n.n = 2(2k^2) \Longrightarrow n^2 = 2k',$$

on pose $k' = 2k^2 \in \mathbb{N}$ *ainsi* $\exists k' \in \mathbb{N},\ n^2 = 2k',\ n^2$ *est pair, d'où le résultat.*

1.2.2 Raisonnement cas par cas

Si l'on souhaite vérifier $\forall x \in E : P(x)$. On montre $\forall x \in A : P(x)$ et $\forall x \in \overline{A} : P(x)$ où A une partie de E.

Exemple 1.11. *Démontrer que* $\forall n \in \mathbb{N} \Longrightarrow \frac{n(n+1)}{2} \in \mathbb{N}$.

cas 1 : n *est pair,* $\exists k \in \mathbb{N}$ *tel que* $n = 2k \Longrightarrow \frac{2k(2k+1)}{2} = k(2k+1) \in \mathbb{N}$.

cas 2 : n *est impair,* $\exists k \in \mathbb{N}$ *tel que* $n = 2k+1 \Longrightarrow \frac{(2k+1)(2k+1)+1}{2} = \frac{(2k+1)(2k+2)}{2} = (2k+1)(2k+1) \in \mathbb{N}$.

Conclusion dans tous les cas $\forall n \in \mathbb{N} \Longrightarrow \frac{n(n+1)}{2} \in \mathbb{N}$.

1.2.3 Raisonnement par la contraposée

Sachant que $(P \Longrightarrow Q) \Longleftrightarrow (\overline{Q} \Longrightarrow \overline{P})$, pour montrer que $(P \Longrightarrow Q)$ on utilise la contraposée, c'est à dire il suffit de montrer que $\overline{Q} \Longrightarrow \overline{P}$ de manière directe, on suppose que $\overline{Q}$ est vraie et on montre que $\overline{P}$ est vraie..

Exemple 1.12. *Soit* $n \in \mathbb{N}$. *Montrer que si* n^2 *est pair* $\Longrightarrow n$ *est pair .*

Nous supposons que n *n'est pair. Nous voulons montrer que* n^2 *n'est pas pair.* n *n'est pas pair, il est impair et donc* $\exists k \in \mathbb{N} : n = 2k+1 \Longrightarrow n^2 = 2l+1$ *et* $l = 2k^2 + 2k \in \mathbb{N}$. *Et donc* n^2 *n'est pas pair. Par contraposition ceci est équivalent à si* n^2 *est pair* $\Longrightarrow n$ *est pair.*

1.2.4 Raisonnement par l'absurde

Pour montrer, par l'absurde, qu'une assertion R est vraie, on suppose que $\overline{R}$ est vraie et on montre qu'on obtient alors une contradiction. Ainsi, pour montrer, par l'absurde, l'implication $P \Longrightarrow Q$, on suppose à la fois que P est vraie et que Q est fausse (i.e., $P \Longrightarrow Q$ est fausse) et on cherche à une contradiction.

Exemple 1.13. *Soit* n *un entier naturel. Montrons par l'absurde que si* $3n+2$ *est impair* $\Longrightarrow$ n *est impair.*

Supposons que $3n+2$ *est impair et que* n *est pair.*

n est pair donc $\exists k \in \mathbb{N}$: $n = 2k \Longrightarrow 3n+2$ est pair, on obtient ainsi que $3n+2$ est pair et $3n+2$ est impair, contradiction.

1.2.5 Contre exemple

Pour montrer qu'une proposition est fausse il suffit de donner ce qu'on appelle un contre-exemple c'est à dire un cas particulier pour lequel la proposition est fausse.

Exemple 1.14. *La proposition (n est un nombre pair) $\Longrightarrow$ (n^2+1 est pair), fausse car pour $n=2$, $4+1=5$ n'est pas pair, c'est un contre-exemple.*

1.2.6 Raisonnement par récurrence

Pour montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0, P(n)$ est vraie on suit les étapes suivantes :

1. Initialisation : On montre que $P(n_0)$ est vraie.
2. Hérédité : On suppose $P(n)$ est vraie pour $n \geq 0$ et en démontre que $P(n+1)$ est vraie.
3. Conclusion : Par le principe de récurrence $\forall n \in \mathbb{N}, P(n)$ et vraie.

Exemple 1.15. *Montrer que $\forall n \in \mathbb{N} : 2^n \geq n$.*

Notons $P(n)$ l'assertion suivante $\forall n \in \mathbb{N} : 2^n \geq n$. Nous allons démontrer par récurrence que $P(n)$ est vraie.

1. *Initialisation : $P(0) : 2^0 = 1 \geq 0$ est vraie.*
2. *Hérédité : Supposons que $P(n)$ est vraie. Nous allons montrer que $P(n+1)$ est aussi vraie.*

   On a :

$$\begin{array}{rcc} 2^{n+1} & = & 2^n \times 2 \\ & = & 2^n + 2^n \\ & > & n + 2^n(\text{ nous avons } 2^n \geq n) \\ & > & n+1(\text{ nous avons } 2^n \geq 1) \end{array}$$

3. *Conclusion : Par le principe de récurrence $P(n)$ est vraie $\forall n \in \mathbb{N} : 2^n \geq n$.*