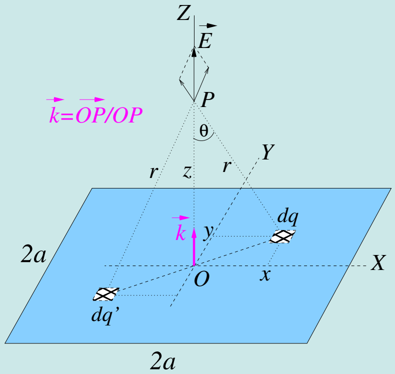
Université de Batna 2 – Mostefa Ben Boulaïd

FACULTÉ DE MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUE

Département Socle Commun - Mathématiques et Informatique

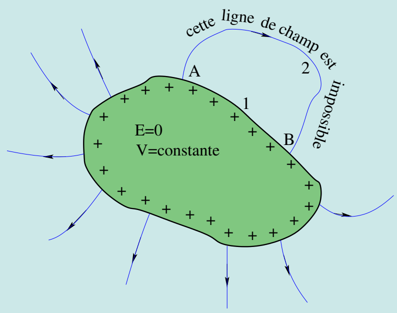
Cours de Phy



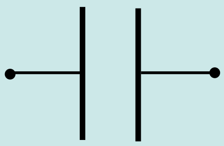
$$\vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \tan^{-1}\left(\frac{a^2}{z\sqrt{z^2+2a^2}}\right)\vec{k}.$$

Si les dimensions de la plaque devenaient infiniment grandes, on devrait retrouver le cas du plan infini :

$$\lim_{a\to\infty} \vec{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\vec{k}.$$



Ci-dessus, en bleu, on voit une plaque carrée chargée uniformément. Elle crée en un point P de son axe, de cote z, le champ $\vec{E}$ dont l'expression est écrite à sa droite. Plus à droite, en vert, on a un conduteur à l'équilibre ; ses charges excédentaires se répartissent nécessairement sur sa surface extérieure. Une ligne de champ émergeant du conducteur ne peut pas revenir au conducteur.
Quant aux images d'en bas, à gauche on montre le symbole qu'on utilise pour représenter un condenstateur dans un schéma électrique, l'image du milieu montre différents types de condensateurs vendus dans le commerce et celle de droite un éclair typique observé en temps d'orage et résultant d'une décharge électrostatique entre les nuages et le sol.



Prof. M. A. Belkhir 2021-2022

Table des matières

Chapitre 1

Interaction électrostatique

Qu'est ce que l'électrostatique ? C'est l'étude des effets produits par des *charges électriques statiques, i.e. immobiles*. Des charges électriques statiques peuvent provoquer le mouvement d'autres charges électriques. L'étude d'un tel mouvement rentre, bien sûr, dans l'électrostatique.

1.1 Lexique français-arabe

Électricité = كهرباء

Électrique =كهربائي

charge électrique = شحنة كهربائية

Électrisation = تكهرب

Électrisation par contact = تكهرب بالتماس

Électrisation par frottement = تكهرب بالإحكاك

Électrisation par influence = تكهرب بالحث

Électron = إلكترون; proton = بروتون ; neutron = نوترون

Électron libre = إلكترون حر

Électroscope = كاشف كهربائي

Électronégatif = كهرسالب

Électrostatique (adjectif) = كهرساكن

interaction électrostatique التفاعل الكهروستاتيكي

Électrostatique (nom) = كهرباء ساكنة أو كهرستتيكية

1.2 Notion de charge électrique

Dans la nature tout objet est fait d'atomes.
Un atome est une particule composée d'un noyau (النواة) et d'un ensemble d'électrons qui gravitent autour du noyau.
Le noyau est fait de neutrons (leur nombre est N_n) et de protons (leur nombre est N_p).
Un atome est caractérisé par son numéro atomique Z et son nombre de masse A avec $Z = N_p$ et $A = N_p + N_n$.
La différence $A - Z$ donne le nombre de neutrons. Pour un atome de symbole X, on résume ces données

sous la notation suivante : ${}^{Z}_{A}\mathrm{X}$. Exemple le lithium (Li) est identifié par un numéro atomique égale à 3 et un nombre de masse égale à 7, ce que l'on symbolise par ${}^{3}_{7}\mathrm{Li}$.

Les électrons sont des particules chargées négativement, les protons sont des particules chargées positivement et les neutrons sont des particules électriquement neutres.

Un proton porte la charge positive $q_p = 1.602 \times 10^{-19}\,\mathrm{C}$, un électron porte la charge négative $q_e = -1.602 \times 10^{-19}\,\mathrm{C}$. En valeur absolue, protons et électrons portent la même charge $e = 1.602 \times 10^{-19}\,\mathrm{C}$. On qualifie cette charge de *charge élémentaire* car c'est la plus petite charge observable et mesurable qui existe dans la nature.[1]

Dans un atomes neutre, il y a Z électrons (charge $-Ze$) et Z protons (charge $+Ze$). Un atome qui perd des électrons se retrouve avec plus de protons et devient un ion positif (exemple Cu^{++}), un atome qui gagne des électrons se retrouve avec plus d'électrons et devient un ion négatif (exemple O^{--}).
De la même façon, dans un objet neutre (عديمة الشحنة) il y a autant d'électrons que de protons. Quand un objet présente un défaut (نقص) ou un excès (زيادة) d'électrons, il n'est plus neutre ; on dit qu'il est chargé électriquement (مكهرب ، مشحون كهربائيا). Sa charge est positive dans le cas d'un défaut d'électrons et négative dans le cas d'un excès.

Synonymes : Chargé électriquement = électrisé = porte une charge électrique. Quand le contexte 'électrique' est clair (السياق واضح), on pourra dire simplement qu'un objet est chargé ou porte une charge sans avoir besoin de rajouter l'adverbe 'électriquement' ou l'adjectif 'électrique'.

1.3 Quantification de la charge électrique

Puisque, comme mentionné précédemment, l'électrisation n'est autre qu'un défaut ou un excès d'électrons, la charge électrique portée par un objet apparaît toujours sous forme d'un multiple de la charge élémentaire e. Autrement dit, toute charge électrique Q observable,[2] est forcément un multiple de e :

$$Q = \pm\, ne \tag{1.1}$$

où n est un entier positif ou nul. L'équation (1.1) n'est autre que l'expression de la quantification de la charge électrique.

1.4 Unité SI de la charge électrique

L'unité SI (Système International) de la charge est le coulomb (symbole C). Les charges typiques portées par les objets frottés sont de l'ordre du microcoulomb, nanocoulomb voire du picocoulomb. Le coulomb représente donc une très grande quantité de charge. Souvent, il est plus commode d'utiliser des sous-multiples :
le microcoulomb, $1\,\mu\mathrm{C} = 10^{-6}\,\mathrm{C}$;
le nanocoulomb, $1\,\mathrm{nC} = 10^{-9}\,\mathrm{C}$;
et le picocoulomb, $1\,\mathrm{pC} = 10^{-12}\,\mathrm{C}$.

Exercice d'application : L'électron et le proton ont respectivement pour charge $q_e = -1.602 \times 10^{-19}$ C et $q_p = +1.602 \times 10^{-19}$ C. a) Calculer le nombre d'électrons que doit gagner un objet neutre pour qu'il devienne chargé de $-1\,\mathrm{C}$. b) Calculer la variation relative de masse si initialement elle était de 1 gramme. La masse de l'électron est $m_e = 9.109 \times 10^{-31}$ kg.

1. Il faut noter, cependant, que la physique des particules a démontré l'existence de **quarks** avec des charges de $\pm\frac{1}{3}e$ ou $\pm\frac{2}{3}e$, c'es-à-dire plus petites que la charge e. Mais, jusqu'à présent, personne n'a pu isoler un quark, on continue donc à considérer la charge e comme étant la plus petite charge mesurable.
2. Les lettres q et Q sont, en général, les symboles utilisés pour désigner les charges électriques portées par les objets.

Solution : a) Pour trouver le nombre d'électrons, on divise $-1\,\mathrm{C}$ *par la charge de 1 électron, i.e.* $-1.602 \times 10^{-19}\,\mathrm{C}$. *On trouve* 6.242×10^{18}. *Autrement dit, il faut* 6.242 *milliards de milliards d'électrons pour produire une charge de* $-1\,\mathrm{C}$. *Ceci laisse comprendre que le coulomb est une unité énorme ! ; b) Si* m_i, m_f *sont les masses initiale et finale de l'objet, la variation relative de masse est donnée par* $(m_f - m_i)/m_i$. *Ici* $m_i = 1\,\mathrm{g}$, $m_f = m_i + m_{\,\mathrm{g}}$ *(*$m_{\,\mathrm{g}}$*= masse des électrons gagnés par l'objet)* $\Longrightarrow$ $(m_f - m_i) = m_{\,\mathrm{g}}$, *ce qui conduit à une variation relative de masse de* 5.686×10^{-9}. *Cette fraction est tellement petite (نسبة ضئيلة للغاية) qu'on ignore (لا نأخذ بعين الاعتبار) la variation de masse d'un objet entre son état neutre et son état électrisé.*

1.5 Conservation de la charge

Dans un système isolé, la charge n'est ni créée, ni détruite ; elle ne peut qu'être transférée d'un élément du système à un autre élément du système. Pour un système composé de deux élément, si une charge apparaît sur un élément du système, une charge de même valeur mais de signe opposé apparaît en même temps sur l'autre élément du système.

Example : A glass rod when rubbed with silk cloth, acquires a charge of $1.6 \times 10^{-11}\,\mathrm{C}$, then the charge on silk cloth will be :
A) $= 3.2 \times 10^{-11}\,\mathrm{C}$; B) $= -3.2 \times 10^{-11}\,\mathrm{C}$; C) $= -1.6 \times 10^{-11}\,\mathrm{C}$; D) $= 1.6 \times 10^{-11}\,\mathrm{C}$.
Answer : When glass rod is rubbed with silk, electrons move from rod to silk.
Since silk gets electrons it becomes negatively charged and the number of electrons gained by silk is same as that lost by rod.
Hence magnitude of charge on silk is same as that on rod.
Hence charge on silk $= -1.6 \times 10^{-11}\,\mathrm{C}$, the correct answer is C).

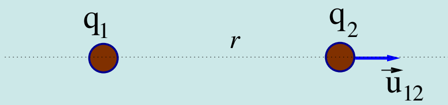
1.6 Loi de Coulomb

Quand une charge est portée par une masse ponctuelle, on la nomme *charge ponctuelle* (شحنة نقطية). Le vocable de *particule chargée* est parfois employé à la place de charge ponctuelle.

Considérons deux charges ponctuelles q_1 et q_2 séparée d'une distance r. L'expérience montre que chacune agit sur l'autre avec une force

i) dirigée suivant la droite joignant q_1 et q_2,
ii) proportionnelle au produit $q_1 q_2$, répulsive si q_1 et q_2 sont de même signe et attractive si q_1 et q_2 sont de signes contraires.
iii) inversement proportionnelle au carré de la distance entre q_1 et q_2.
Si on note $\vec{F}_{1/2}$ la force avec laquelle q_1 agit sur q_2, alors

$$\vec{F}_{1/2} = k\frac{q_1 q_2}{r^2}\vec{u}_{12} \tag{1.2}$$



où $\vec{u}_{12}$ est, par définition, un vecteur unitaire porté par la droite joignant les deux charges et orienté de la charge qui exerce la force (تمارس القوة) $\vec{F}_{1/2}$ vers la charge qui subit cette force (تتعرض لهذه القوة)

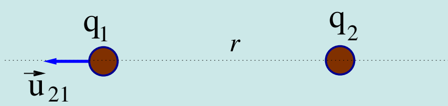
Remarque

Si $\vec{r}_{12}$ désigne le vecteur joignant q_1 à q_2, alors $\vec{u}_{12} = \vec{r}_{12}/r_{12} = \vec{r}_{12}/r$ et l'équation (1.2) est s'écrit aussi sous la forme

$$\vec{F}_{1/2} = k\frac{q_1 q_2}{r^3}\,\vec{r}_{12}.$$

Réciproquement, la force exercée par q_2 sur q_1 s'écrit :

$$\vec{F}_{2/1} = k\frac{q_1 q_2}{r^2}\vec{u}_{21} \tag{1.3}$$

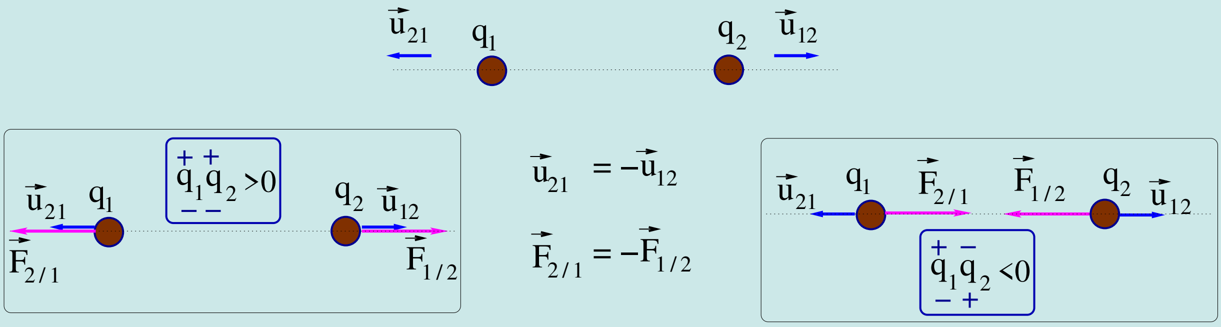


où le vecteur unitaire $\vec{u}_{21}$ est, cette fois-ci, orienté de q_2 (charge qui exerce la force) vers q_1 (charge qui subit la force).

D'après la définition des vecteurs unitaires $\vec{u}_{21}$ et $\vec{u}_{12}$, il est clair que $\vec{u}_{21} = -\vec{u}_{12}$ et, par suite,

$$\vec{F}_{2/1} = -\vec{F}_{1/2} \tag{1.4}$$

L'égalité (1.4) dit que la force de Coulomb obéit au principe de l'action et de la réaction (troisième loi de Newton).



Même si les vecteurs $\vec{u}_{12}$ et $\vec{u}_{21}$ sont, par définition, complètement définis (module, direction et sens), il n'en est pas de même des forces $\vec{F}_{1/2}$ et $\vec{F}_{2/1}$. Leur sens est déterminé par le signe du produit des charges $q_1 q_2$. Elles sont attractive si q_1 et q_2 sont de signes contraires et répulsive si q_1 et q_2 sont de même signe. La figure ci-dessus résume les différentes situations possibles suivant le signe de chacune des charges. La constante de proportionnalité k est une constante positive appelée parfois constante de Coulomb. Dans le système SI, cette constante s'écrit sous la forme

$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}. \tag{1.5}$$

La constante ϵ_0 s'appelle permittivité diélectrique du vide (ou constante diélectrique du vide) et vaut $8.854187817... \times 10^{-12}\,\mathrm{C}^2\ \mathrm{N}^{-1}\,\mathrm{m}^{-2}$. L'équation (1.5) donne alors : $k = 8.987551787... \times 10^9\,\mathrm{N\,m^2\,C^{-2}}$, mais pour la plupart des applications numériques, on prend

$$k \approx 9 \times 10^9\ \mathrm{N\,m^2\,C^{-2}}.$$

Maintenant qu'on connaît la valeur de k, on voit sur l'équation (1.2) que si $q_1 = q_2 = 1\,\mathrm{C}$ et $r = 1\,\mathrm{m}$, alors les deux charges vont se repousser avec une force de 9×10^9 N. Cette force est équivalente au poids d'une masse de 900 000 000 kg ! Il apparaît clairement que le coulomb, comme on l'a déjà mentionné précédemment, est une unité trop grande pour exprimer les quantités de charge statiques usuelles, d'où l'utilité des sous-multiples du coulomb.

1.6.1 Cas de plusieurs charges : principe de superposition

La loi de Coulomb donne la force créée par une charge sur une autre charge. Lorsqu'il y a plusieurs charges q_1, q_2, q_3, ..., q_{N} qui agissent sur une charge Q, la force totale sur Q s'obtient en faisant la somme vectorielle des forces exercées sur elle par q_1, q_2, ...

$$\vec{F_Q} = \vec{F}_{1/Q} + \vec{F}_{2/Q} + ... + \vec{F}_{\mathrm{N}/Q} = \sum_{i}^{N} \vec{F}_{i/Q}. \tag{1.6}$$

La force $\vec{F}_{i/Q}$ exercée par q_i sur Q se calcule suivant la loi de Coulomb indépendamment de la présence des autres charges :

$$\vec{F}_{i/Q} = k\frac{q_i Q}{r^2{}_{iQ}}\vec{u}_{iQ},$$

où r_{iQ} désigne la distance de q_i à Q, et $\vec{u}_{iQ}$ est un vecteur unitaire allant dans les sens $q_i \to Q$.

1.7 Matériaux conducteurs et matériaux isolants

Du point de vue électrique, la plupart des matériaux (مواد) sont soit conducteurs (ناقلة) (les métaux, les alliages, le corps humain, l'eau, ...) soit isolants (عازلة) (le verre, le soufre, le plastique, l'ambre, le caoutchouc, ...). Un conducteur est un corps dans lequel les charges électriques peuvent se déplacer tandis que dans un isolant les charges électriques ne peuvent pas circuler. Il en résulte que quand on charge un conducteur, les charges se répartissent (توزع) sur tout le corps, même loin de l'endroit où elles ont été déposées. Mais quand on charge un isolant, les charges restent à l'endroit où elles ont été créées (تبقى حيث تم إنتاجها).

1.7.1 Comment électriser un objet ?

Il y a trois façons d'électriser ou charger électriquement un objet.

1) Électrisation par frottement : Lorsqu'on frotte deux corps l'un contre l'autre, il se produit un transfert d'électrons de l'un vers l'autre. Le corps qui gagne des électrons se retrouve avec plus d'électrons que de protons et se charge négativement et celui qui perd des électrons se retrouve avec plus de protons que d'électrons et se charge positivement.

Mais comment savoir lequel des deux perd ou gagne des électrons ?

En se basant sur l'expérience, on classe les objets dans un ordre tel que lorsqu'on frotte deux d'entre eux l'un sur l'autre, celui qui précède l'autre sur la liste (dite *triboélectrique*) s'électrise positivement. Une liste triboélectrique, non exaustive, est présentée ci-dessous :

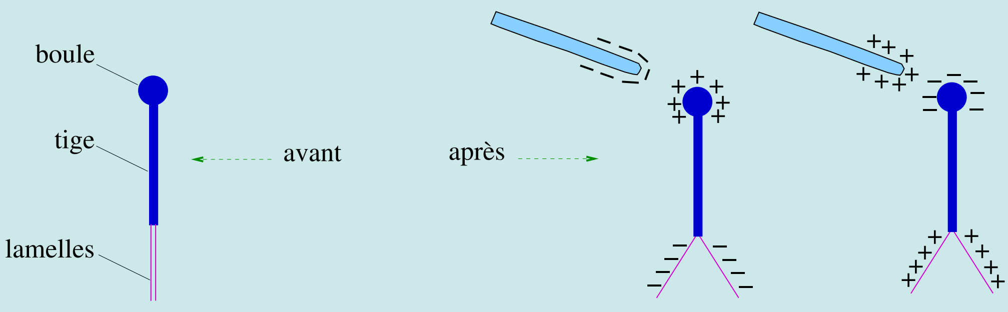
Peau humaine sèche - cuir - Fourrure de lapin - Verre - Quartz - Cheveux humains - Nylon - Laine - Fourrure de chat - Soie - aluminium - Papier- Coton - Acier - Bois - Ambre - Cuivre - Argent - Or - Platine - Polystyrène - Cellophane - PVC - Silicone - Téflon - Caoutchouc de Silicone.

Exemples :
i) Le verre précède la laine sur la liste précédente. Si on les frotte l'un contre l'autre, le verre se chargera positivement. Mais si le verre est frotté avec une fourrure de lapin de lapin, il se chargera négativement car la fourrure de lapin précède le verre.
ii) De la même façon, si on frotte une tige en PVC (chlorure de polyvinyle) avec de la laine, des électrons vont passer de la laine à la tige qui se charge négativement.

2) Électrisation par contact : Si un objet chargé touche un conducteur neutre, une partie de la charge de l'objet sera transférée de l'objet vers le conducteur. L'objet chargé peut être un conducteur ou un isolant mais l'objet à charger doit être un conducteur pour permettre le déplacement des charges vers lui.

3) Électrisation par influence : Soit un objet chargé placé près d'un conducteur neutre mais sans le toucher. Selon que l'objet est chargé négativement ou positivement, les électrons du conducteur vont soit s'éloigner le plus loin possible de l'objet, soit s'approcher le plus près possible de l'objet et viendront se regrouper du côté du conducteur près de l'objet. On peut illustrer l'électrisation par influence en faisant une expérience avec l'électroscope (المكشاف الكهربائي).

L'électroscope est un ensemble conducteur constitué d'une tige métallique (قضيب معدني) verticale à l'extrémité de laquelle pendent deux lamelles légères parallèles et une boule fixée au sommet de la tige (figure a). L'électroscope est globalement neutre. On approche de la boule de l'électroscope une baguette chargée. On observe systématiquement une



(a) (b) (c)

répulsion des lamelles. Voici l'explication. Si la baguette est chargée négativement, elle repousse les électrons libres de l'électroscope. Ces électrons se retrouvent en excès dans les lamelles qui deviennent chargées négativement et se repoussent (figure b). Si la baguette est chargée positivement, elle attire les électrons libres de l'électroscope. Ces électrons se retrouvent en défaut dans les lamelles qui deviennent chargée positivement et se repoussent (figure c).

Pour compléter vos acquis, je vous donne deux adresses internet où vous pouvez regarder deux vidéos qui montrent quelques phénomènes intéressants d'électrostatique :
https ://www.youtube.com/watch ?v=3BnX230Yfvo ; https ://www.youtube.com/watch ?v=gz1NSzdqtm0

1.8 Questions et exemples d'application

1- Le noyau d'un atome est fait de neutrons électriquement neutres et de protons chargés positivement. Pourquoi le noyau ne s'envole-t-il pas en morceaux malgré la très forte répulsion électrostatique entre les protons ?
Si le noyau ne s'envole pas en morceaux, c'est qu'il existe une force qui l'en empêche. Cette force ne relève ni de la gravitation ni de l'électricité. C'est la force dite nucléaire où encore interation forte. C'est elle qui est responsable de la cohésion du noyau dans les atomes.

2- Proposez un moyen d'électriser positivement une sphère métallique à partir d'une tige en plastique préalablement chargée négativement.
i) On approche la sphère près d'une tige préalablement chargée négativement. Les électrons de la sphère seront repoussés le plus loin possible de la tige. ii) Par un fil conducteur, on relie la sphère à la terre et les électrons de la sphère s'éloigneront jusqu'à la terre. iii) On supprime la connexion à la terre et la sphère est laissée avec un déficit d'électrons. On obtient ainsi une sphère chargée positivement.

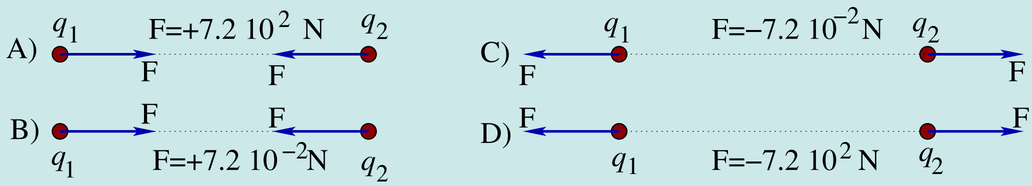
3- L'image sur la page de garde (صفحة الغلاف), en bas à droite, montre un exemple de décharge électrostatique qui se produit par temps d'orage entre un nuage et le sol. Documentez-vous puis expliquez ce phénomène naturel, appelé foudre (برق), du point de vue électrostatique.

4- Citez les différentes façons d'électriser un objet.
Il existe trois façons d'électriser un objet : par frottement (ou friction), par contact (ou conduction) et par influence (ou induction).
L'électrisation par frottement consiste à frotter un matériau contre un autre, ce qui crée un déplacement d'électrons d'un matériau à l'autre. Cette méthode convient pour électriser, de préférence, les isolants.
L'électrisation par influence ou par induction (convient pour électriser les métaux). L'électrisation par contact ou par condution (convient également pour électriser les métaux.

Voici quelques expériences que chacun de vous peut réaliser.
i) Un ballon de baudruche frotté avec un morceau de laine dévie un mince filet d'eau qui coule du robinet.
ii) Un objet (règle, briquet, stylo, ...) en plastique frotté au cuir chevelu attire de petits morceaux de papier. Si la charge est conséquente, ils dévient aussi un mince filet d'eau.

Pour les applications numériques, on prendra $k = 9 \times 10^9$ N· m^2·C^{-2}.

Exemple 1 : Deux charges ponctuelles $q_1 = 1\,\mu$C et $q_2 = -2\,\mu$C sont à une distance $d = 50$ cm l'une de l'autre. Quelles sont les forces (grandeur, direction et sens) qui agissent sur ces charges ? Sélectionnez une des réponses ci-dessous :



Rép : Les forces sont attractives car les charges sont de signes contraires. Le module est $k|q_1 q_2|/d^2 = 9 \times 10^9 \times |(1 \times 10^{-6})(-2 \times 10^{-6})|/(0.5)^2 = 7.2 \times 10^{-2}$ N. *Donc, la bonne réponse c'est B).*

Exemple 2 : Deux sphères identiques de cuivre, chacune de masse 1 kg, sont séparées de 1 m. a) Combien d'électrons chaque sphère contient-elle ? b) Combien d'électrons devraient être extraits de chaque sphère pour avoir une répulsion de 10^4 N entre les deux sphères ? c) Quelle fraction représente la réponse à la question b) par rapport au nombre total d'électrons contenus dans chaque sphère ?

Données : Dans 63.5 grammes de cuivre il y a N_A atomes ($N_A = \text{nombre d'Avogadro} = 6.02 \times 10^{23}$) et il y a 29 électrons dans chaque atome de cuivre.

Rép : a) 2.75×10^{26} *électrons ; b)* 6.59×10^{15} *électrons ; c)* 2.39×10^{-11}.

Chapitre 2

Champ et potentiel électrostatiques

2.1 Lexique français-arabe

Champ électrique = حقل كهربائي

Champ élecrostatique = حقل كهروساكن

Énergie potentielle = الطاقة الكامنة

Potentiel électrique = الكمون الكهربائي

Champ (potentiel) électrique créé par un ensemble discret de charges ponctuelles =
حقل (كمون) كهربائي ناتج عن عدة شحنات نقطية متفرقة

Champ (potentiel) électrique créé par une distribution continue de charges ponctuelles =
حقل (كمون) كهربائي ناتج عن توزيع مستمر للشحنة

Lignes de champ = خطوط الحقل

Surfaces équipotentielles = سطوح متساوية الكمون

Théorème de Gauss = نظرية غوص

Dipôle élecrostatique = ثنائي القطب الكهربائي

Moment dipolaire électrique = العزم الكهربائي لثنائي القطب

2.2 Concept de champ électrostatique

Considérons une charge ponctuelle q' placée à la distance r d'une autre charge ponctuelle q. La loi de Coulomb (voir chapitre 1) nous enseigne qu'il existe une interaction électrostatique mutuelle, attractive ou répulsive, entre q et q'. La

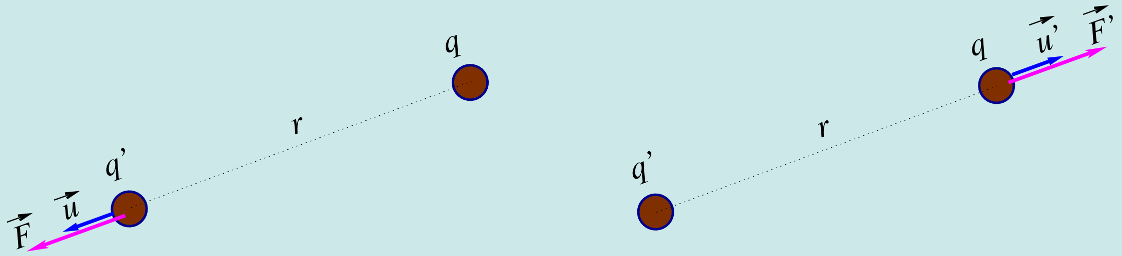


FIGURE 2.1 – Interaction électrostatique entre q et q'. Sur la figure la force est supposée répulsive.

force que subit la charge q' de la part de q s'écrit :

$$\vec{F} = k\frac{q'q}{r^2}\vec{u}, \tag{2.1}$$

où $\vec{u}$ est le vecteur unitaire orienté, par définition, de la charge qui agit vers la charge qui subit, c'est-à-dire ici de q vers q'.
Réciproquement, la force que subit la charge q de la part de q' s'écrit :

$$\vec{F'} = k\frac{q'q}{r^2}\vec{u'}, \tag{2.2}$$

où $\vec{u'}$ est le vecteur unitaire orienté dans le sens q' vers q.

L'équation (2.1) peut se réécrire sous la forme :

$$\vec{F} = q'\left(k\frac{q}{r^2}\vec{u}\right) \tag{2.3}$$

Sous cette forme, on voit que $\vec{F}$ est un produit de deux quantités :
i) la charge q' dont la valeur est indépendante de la présence ou non de q' et
ii) la quantité $\left(k\frac{q}{r^2}\vec{u}\right)$ dont l'expression est indépendante de la présence ou non de q'. Cette deuxième quantité dépend uniquement de q, r et $\vec{u}$. C'est une quantité qui peut être calculée pour tout point de l'espace autour de la charge électrostatique q. Autrement dit, du fait de sa présence, *la charge ponctuelle q affecte l'espace en y créant un champ électrostatique $\vec{E}$,*

$$\vec{E} = k\frac{q}{r^2}\vec{u}, \tag{2.4}$$

de sorte que toute autre charge q' qui se trouve autour d'elle ressente une force

$$\vec{F} = q'\vec{E}. \tag{2.5}$$

Bien entendu, le raisonnement tenu avec q est valable pour n'importe quelle charge ponctuelle.

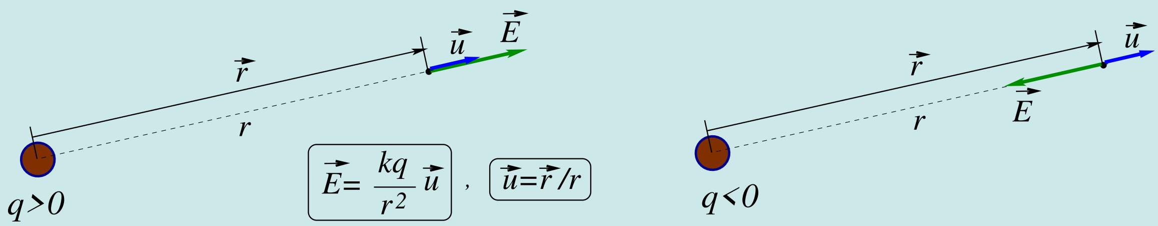


FIGURE 2.2 – Champ créé par une charge ponctuelle unique

Par définition, le vecteur unitaire $\vec{u}$ est porté par le vecteur $\vec{r}$ joignant la charge "source" q au point considéré et il est de même sens :

$$\vec{u} = \frac{\vec{r}}{r}. \tag{2.6}$$

Le champ $\vec{E}$ est un vecteur. Il est de même sens que $\vec{u}$ si q est positive, il est de sens contraire si q est négative. Son module est proportionel à $|q|$ et inversement proportionnel au carré de la distance r.

Compte tenu de (2.6), l'équation (2.4) peut prendre la forme équivalente :

$$\vec{E} = kq\frac{\vec{r}}{r^3}. \tag{2.7}$$

De (2.5) on tire :

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q'} \tag{2.8}$$

Cette dernière équation montre que l'unité SI du champ électrique est le newton par coulomb (N/C). Elle permet aussi d'interpréter le champ électrique en un point comme la force que ressentirait une de charge de 1 C placée en ce point. Nous verrons à la section 2.8 que le champ électrique s'exprime aussi à l'aide d'une unité SI équivalente au newton par coulomb.

2.3 Champ électrostatique créé par un ensemble discret de charges

Considérons un ensemble discret de charges ponctuelles q_1, q_2, q_3, ... se trouvant respectivement aux distances non nulles r_1, r_2, r_3, ... d'un point de l'espace qui les entoure.
Ces charges créent en ce point les champs $\vec{E}_1$, $\vec{E}_2$, $\vec{E}_3$, ... respectivement. Le champ électrostatique total est la somme vectorielle de tous ces champs :

$$\vec{E}_{\text{total}} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3 + ... \tag{2.9}$$

Le champ créé par chacune des charges ponctuelles se calcule indépendamment de la présence des autres charges. Par exemple :

$$\vec{E}_1 = \frac{kq_1}{r_1^2}\,\vec{u}_1 \tag{2.10}$$

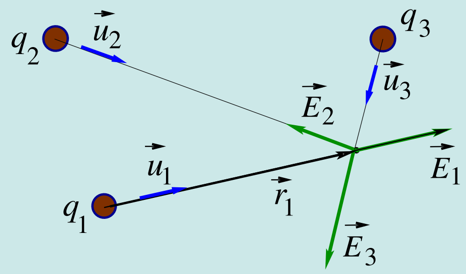
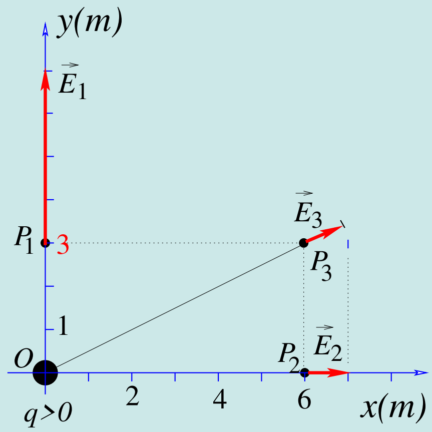


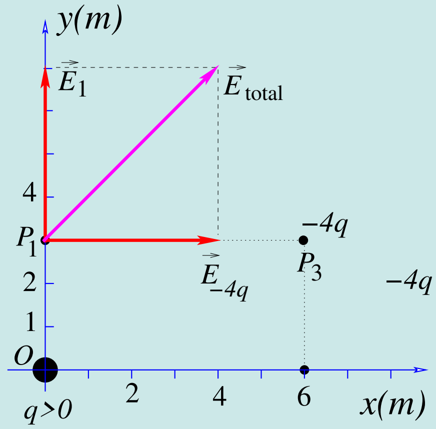
FIGURE 2.3 – Champ créé par un ensemble discret de charges ponctuelles

Remarque : Une charge ponctuelle crée un champ électrique en tous les points de l'espace qui l'entoure mais pas au point où elle se trouve. Elle ne ressent pas son propre champ, elle ne peut ressentir que le champ créé par d'autre charges. Autrement dit, si par exemple on a un ensemble de 3 charges q_1, q_2 et q_3, et qu'on veut calculer le champ électrique au point où se trouve q_2, ce champ est égal à la somme des champs créés par q_1 et q_3 : $\vec{E}_{\text{total}} = \vec{E}_1 + \vec{E}_3$.

Exemple 1 :

On place une charge ponctuelle q à l'origine O d'un système d'axes rectangle xy. Les axes x et y sont gradués en mètres. 1) Calculer le module E_1 du champ électrostatique créé par q au point $P_1(0\,,\,3)$. On prendra $k = 9 \times 10^9$ unités SI et $q = 1\,\text{nC}$. Dessiner le vecteur-champ électrostatique $\vec{E}_1$ (1N/C sera représenté par 4 cm sur le dessin) [1]. 2) Exprimer le module E_2 du champ électrostatique créé par q au point $P_2(6, 0)$ en fonction de E_1 puis dessiner $\vec{E}_2$. 3) Exprimer le module E_3 du champ électrostatique créé par q au point $P_3(6, 3)$ en fonction de E_1 puis dessiner $\vec{E}_3$. 4) Calculer le champ total au point P_1 si on place une deuxième charge égale à $-4q$ au point $P3$. Donner son module et l'angle qu'il fait l'axe $+y$.





1) Calculons E_1 :

$$E_1 = \frac{kq}{OP_1^2} = \frac{9 \times 10^9 \times 10^{-9}}{3^2} = 1\,\text{N/C}. \tag{2.11}$$

Le vecteur $\vec{E}_1$ (voir figure ci-dessus) est porté par la ligne joignant q à P_1, c'est-à-dire par l'axe y. Il est orienté dans le sens de $\overrightarrow{OP_1}$ car $q > 0$: $\vec{E}_1 = E_1\vec{j}$. Valant 1 N/C, sa longueur sur le dessin sera de 4 cm comme exigé par l'énoncé.

2) Exprimons E_2 en fonction de E_1 : Avant de commencer, remarquons que $OP_2 = 2OP_1$.

$$E_2 = \frac{kq}{OP_2^2} = \frac{kq}{(2OP_1)^2} = \frac{1}{4}\frac{kq}{OP_1^2} = \frac{1}{4}E_1. \tag{2.12}$$

Le vecteur $\vec{E}_2$ est orienté suivant $\overrightarrow{OP_2}$. Sa longueur sur le dessin sera de $4\,\text{cm}/4 = 1$ cm.

3) Exprimons E_3 en fonction de E_1 : $OP_3^2 = OP_1^2 + OP_2^2 = OP_1^2 + 4OP_1^2 = 5OP_1^2$.

$$E_3 = \frac{kq}{OP_3^2} = \frac{kq}{5OP_1^2} = E_1/5 = 0.2\,E_1. \tag{2.13}$$

1. Pour représenter un vecteur, on doit choisir une échelle telle que tous les vecteurs puissent être dessinés de manière claire sur la figure.

Le vecteur $\vec{E}_3$ est orienté suivant $\overrightarrow{OP_3}$. Sa longueur sur le dessin sera de $4\,\text{cm}/5 = 0.8$ cm.

4) Le champ créé en P_1 par la charge $-4q$ placée en P_3 est : $\vec{E}_{-4q} = k(-4q)(\overrightarrow{P_3P_1}/P_3P_1^3) = -4kq(-6\vec{i}/6^3) = (kq/9)(\vec{i}) = 1\,\text{N/C}\,\vec{i}$. Le champ total en P_1 est : $\vec{E}_{\text{total}} = \vec{E}_1 + \vec{E}_{-4q} = 1\,\text{N/C}\,\vec{i} + 1\,\text{N/C}\,\vec{j} = 1\,\text{N/C}\,(\vec{i}+\vec{j})$. Il fait 45° avec $+y$, son module vaut $1\,\text{N/C}\,\|(\vec{i}+\vec{j})\| = \sqrt{2}\,\text{N/C}$.

2.4 Champ électrostatique créé par une distribution continue de charges

Il arrive que les charges soient distribuées de sorte qu'elles sont collées les unes unes aux autres sans laisser de vide entre elles. On parle alors de distributions ou systèmes continus de charges par opposition à ensemble discret traité précédemment. On peut avoir une distribution continue sur un fil, une plaque ou un objet volumineux.

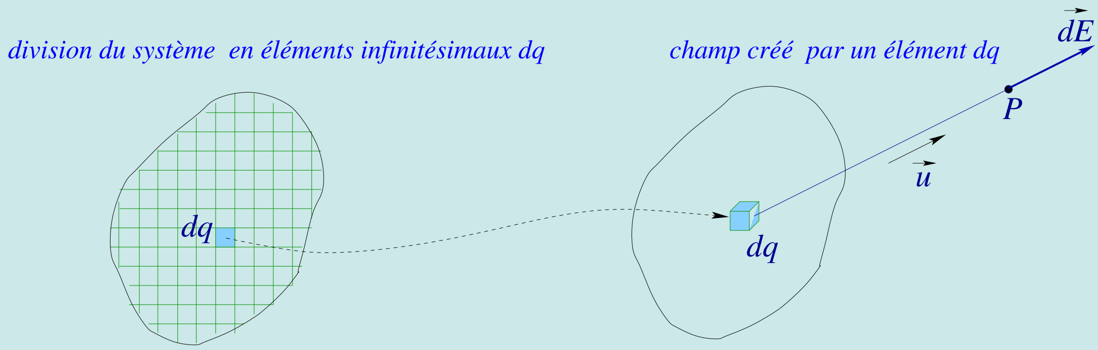


Figure 2.4 – Champ créé par une ditribution continue de charges

Pour calculer le champ créé par un système continu, on divise le système en petits éléments dq *assimilables* à des charges ponctuelles. Chaque élément dq crée, conformément à l'équation (2.4), en un point P de l'espace qui l'entoure, le champ élémentaitre (figure ci-dessous) :

$$d\vec{E} = k\frac{dq}{r^2}\vec{u}, \tag{2.14}$$

Le champ total s'obtient en additionnant les champs créés en P par tous les éléments dq. Mathématiquement cette opération s'exprime à l'aide de l'intégrale :

$$\vec{E} = k\int_{distribution}\frac{dq}{r^2}\vec{u}. \tag{2.15}$$

Pour évaluer cette intégrale, il est nécessaire d'exprimer toutes les quantités qui varient en fonction d'une seule variable.
Cas d'une distribution linéique
Pour une distribution linéique L (par exemple un fil chargé), on peut définir une densité linéique

$$\lambda = \frac{dq}{dl}$$

où dl (qui peut s'appeler dx, dy, dz si par exemple le fil est disposé le long de l'un des axes d'un système xyz) est un élément de longueur du fil. L'unité de λ est C/m. Avec cette définition, l'équation (2.15) pour une distribution linéique s'écrit :

$$\vec{E} = k\int_L\frac{\lambda dl}{r^2}\vec{u}. \tag{2.16}$$

Cas d'une distribution surfacique
Pour une distribution surfacique S (par exemple un disque chargé), on peut définir une densité surfacique

$$\sigma = \frac{dq}{ds}$$

où ds est un élément de surface de la distribution. L'unité de σ est bien entendu C/m^2. Avec cette définition, l'équation (2.15) pour une distribution surfacique s'écrit :

$$\vec{E} = k\iint_S\frac{\sigma ds}{r^2}\vec{u}. \tag{2.17}$$

Cas d'une distribution volumique
Pour une distribution volumique V (par exemple un corps massif chargé), on peut définir une densité volumique

$$\rho = \frac{dq}{dv}$$

où dv est un élément de volume de la distribution. L'unité de ρ est bien entendu C/m^3. Avec cette définition, l'équation (2.15) pour une distribution volumique s'écrit :

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\iiint_V \frac{\rho dv}{r^2}\vec{u}. \tag{2.18}$$

Exemple 2 : Calculer le champ créé à la distance d par un fil rectiligne infiniment long chargé avec une densité linéique uniforme négative $-\lambda$. Qu'est-ce qui aurait changé si on avait pris une densité linéique uniforme $\lambda > 0$?
Solution :
Plaçons-nous en un point P situé à la distance a du fil. Appelons O le projeté orthogonal de P sur le fil. Par souci de simplicité, nous choisissons de travailler par rapport à la base $(O;\vec{n},\vec{t})$ où $\vec{n} = \overrightarrow{OP}/OP$ et $\vec{t}$ le vecteur unitaire directement perpendiculaire à $\vec{n}$, donc porté par le fil (figure b) ci-contre). Pour calculer le champ, نقوم بتقسيم السلك إلى عناصر صغيرة بما يكفي بحيث يمكن اعتبارها كتل نقطية on décompose le fil en éléments dl suffisamment petits pour qu'ils puissent être considérés comme des masses ponctuelles, comme le montre la figure a) ci-contre. Chaque dl peut être repéré par sa distance l par rapport à O (voir figure b)). Puisque le fil est chargé avec une densité constante $-\lambda$, chaque dl porte la charge ponctuelle $dq = -\lambda dl$ et crée en P le champ

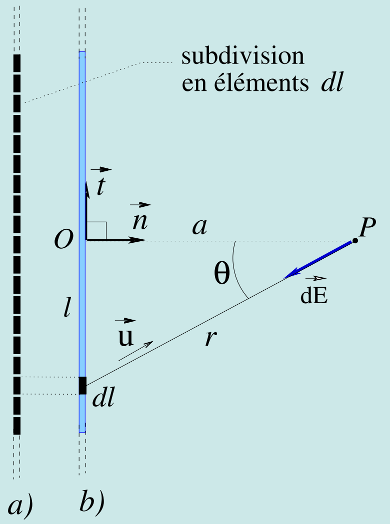
$$d\vec{E} = \frac{-k\lambda dl}{r^2}\vec{u}. \tag{2.19}$$

Dans la base $(\vec{n},\vec{t})$, $\vec{u} = \cos\theta\,\vec{n} - \sin\theta\,\vec{t}$ et par suite :

$$d\vec{E} = \frac{-k\lambda dl}{r^2}(\cos\theta\,\vec{n} - \sin\theta\,\vec{t}) \tag{2.20}$$

Le champ total s'obtient en additionnant les contributions de tous les dl, i.e. en intégrant $d\vec{E}$ sur tout le fil :

$$\vec{E} = \int_{\text{fil}} \frac{-k\lambda dl}{r^2}(\cos\theta\,\vec{n} - \sin\theta\,\vec{t}) \tag{2.21}$$



Quand on se déplace sur les différents dl, l varie entraînant celle de θ et r. Pour effectuer l'intégrale, il y a lieu, donc, d'exprimer ces trois variables en fonction d'une seule variable. Le choix le plus simple est de tout écrire en fonction de θ. Notons que θ est repéré par rapport à l'axe OP. De $\tan\theta = l/a$ on tire $l = d\tan\theta$ et $dl = ad\theta/\cos^2\theta$ (i). D'autre part, sachant que $\cos\theta = a/r$ nous déduisons $r^2 = a^2/\cos^2\theta$ (ii). De (i) et (ii) nous obtenons $dl/r^2 = d\theta/a$ et par substitution dans l'équation (2.21), nous arrivons à :

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \frac{-k\lambda}{a}\int_{\text{fil}}(\cos\theta\,\vec{n} - \sin\theta\,\vec{t})\,d\theta & (2.22)\\ &= \frac{-k\lambda}{a}\int_{\text{fil}}\cos\theta\,d\theta\,\vec{n} + \frac{-k\lambda}{a}\int_{\text{fil}} -\sin\theta\,d\theta\,\vec{t}. & (2.23)\end{aligned}$$

La variable d'intégration est θ. Pour décrire tout le fil, on doit intégrer de $\theta = -\pi/2$ à $\theta = +\pi/2$. La première intégrale donne $\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos\theta\,d\theta = [\sin\theta]_{-\pi/2}^{\pi/2} = 2$; alors que la deuxième $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} -\sin\theta\,d\theta = [\cos\theta]_{-\pi/2}^{\pi/2} = 0$. Finalement

$$\vec{E} = \frac{-2k\lambda}{a}\,\vec{n} \tag{2.24}$$

On obtient un champ total perpendiculaire au fil. La composante parallèle (composante suivant $\vec{t}$) est nulle comme on pouvait s'y attendre en raison de la symétrie du système. Du fait de sa longueur infinie, le fil présente une symétrie par rapport à O. Il est facile de voir deux éléments dl symétriques produisent un champ résultant suivant $\vec{n}$. Le même est valable pour n'importe quel couple d'éléments symétriques, ce qui permet de conclure que le fil entier donne un champ total suivant $\vec{n}$.

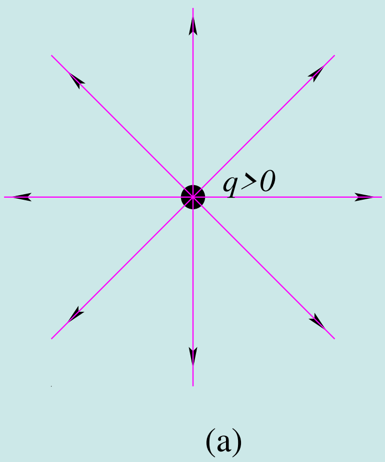
Avec une densité linéique $\lambda > 0$, on obtient le même résultat que précédemment moyennant le remplacement de $-\lambda$ par λ. Sur la figure, il faut juste inverser le sens des vecteurs-champs.

2.5 Lignes de champ

Pour visualiser le champ électrostatique (ou tout autre champ vectoriel) en tous les points de l'espace, on utilise les *lignes de champ*.

Une ligne de champ est une courbe tangente en chacun de ses points au vecteur champ électrique. Les lignes de champ sont orientées dans le sens du champ électrostatique.

La figure ci-dessous montre les lignes de champ pour le fil rectiligne infiniment long et chargé uniformément avec une densité λ. Le calcul du champ a été déjà fait à l'exemple 2 de la section 2.4 où nous avons trouvé que le champ en n'importe quel point hors du fil pointe perpendiculairement vers le fil. En s'appuyant sur la définition, il est faciles de déduire que les lignes de champ sont des droites orientées perpendiculairement vers le fil. Ce qu'on voit sur la FIGURE 2.5-(a) est valable dans n'importe quel plan contenant le fil.



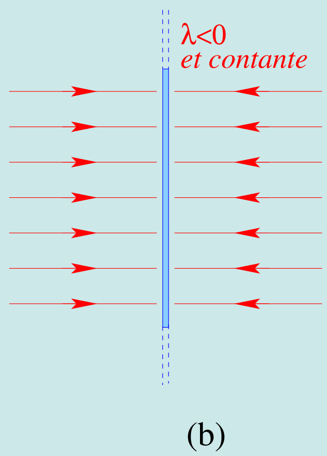


FIGURE 2.5 – (a) : Lignes de champ d'une charge $q > 0$, b) : Lignes de champ d'un fil rectiligne infiniment long et chargé avec une densité $\lambda < 0$ et constante ; (b) : Un élément $\vec{d\ell}$ pris sur une ligne de champ en un point M. Le vecteur $\vec{d\ell}$ est colinéaire au champ électrique $\vec{E}$ en M.

2.5.1 Équation d'une ligne de champ

Considérons un élément infinitésimal $\vec{dl}$ pris sur une ligne de champ. Sur la FIGURE 2.5 b, $\vec{dl}$ s'identifie au vecteur $\overrightarrow{MM'}$, M et M' étant deux points de la ligne de champ infiniment proches.

Le champ $\vec{E}$ en M est parallèle (car tangent en M) à $\vec{dl}$, ce que l'on peut exprimer par l'équation :

$$\vec{E} \times \vec{dl} = \vec{0}. \qquad (2.25)$$

C'est l'équation vectorielle des lignes de champ. Dans les différents systèmes de coordonnées, cette équation s'écrit :

1. Coordonnées cartésiennes :

$$\frac{dx}{E_x} = \frac{dy}{E_y} = \frac{dz}{E_z} \qquad (2.26)$$

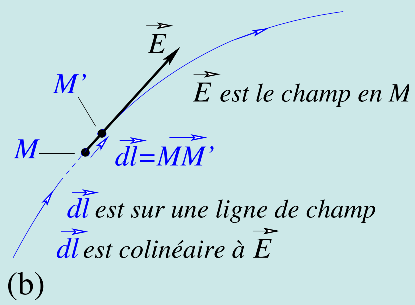


FIGURE 2.6 – Un élément $\vec{d\ell}$ pris sur une ligne de champ en un point M. Le vecteur $\vec{d\ell}$ est colinéaire au champ électrique $\vec{E}$ en M.

2. Coordonnées polaires cylindriques :

$$\frac{d\rho}{E_\rho} = \frac{\rho d\theta}{E_\theta} = \frac{dz}{E_z} \tag{2.27}$$

3. Coordonnées polaires sphériques :

$$\frac{dr}{E_r} = \frac{r d\theta}{E_\theta} = \frac{r \sin\theta d\phi}{E_\phi} \tag{2.28}$$

4. Cas bidimensionnel : quand on est à 2 dimensions l'équation (2.26) se réduit à :

$$\frac{dx}{E_x} = \frac{dy}{E_y} \tag{2.29}$$

De même en coordonnées polaires planes, l'équation (2.27) se réduit à :

$$\frac{d\rho}{E_\rho} = \frac{\rho d\theta}{E_\theta} \tag{2.30}$$

Les lignes de champ possèdent les propriétés suivantes.

1- Les lignes de champs partent toujours des charges positives et aboutissent aux charges négatives.

2- Le nombre de lignes de champs qui partent d'une, ou qui se terminent sur une, charge est proportionnel à la grandeur de la charge.

3- L'intensité du champ est proportionnelle à la densité des lignes, i.e. au nombre de lignes qui traversent une surface unité normale au champ.

4- Les lignes de champ ne se coupent jamais. La raison est qu'en un point donné de l'espace le champ ne peut avoir qu'une seule direction.

5- On verra aussi que les lignes de champ sont perpendiculaires à chaque surface équipotentielle qu'elles interceptent, incluant la surface des conducteurs.

2.5.2 Théorème de Gauss

Le théorème de Gauss s'énonce comme suit : *le flux du champ électrique à travers une surface fermée S quelconque vaut $q_{\text{int}}/\epsilon_0$, q_{int} étant la somme algébrique de toutes les charges contenues dans le volume délimité par S.*

$$\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q_{\text{int}}}{\epsilon_0}. \tag{2.31}$$

Remarque :
- La surface fermée S est parfois appelée surface de Gauss et notée S_G ou S_g.
- S peut renfermer un système de charges discret et/ou continu.

2.5.3 Application du théorème de Gauss pour le calcul du champ électrique

L'application du théorème de Gauss est très utile pour calculer le champ électrostatique créé par des distributions de charges qui présentent un haut degré de symétrie. Dans ce cas, on va pouvoir choisir une surface de Gauss S_G qui permettra de calculer facilement l'intégrale (2.31). Dans ce contexte, les observations suivantes sont utiles :

1. Si, en tous les points d'une surface S, le champ $\vec{E}$ garde un module constant et est dirigé perpendiculairement à S, alors $E \cdot d\vec{S} = EdS\cos(0\,\text{ou}\,\pi) = \pm E\,dS$, $+$ si $\vec{E}$ parallèle à $d\vec{S}$ et $-$ si $\vec{E}$ antiparallèle à $d\vec{S}$.

$$\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \pm \oiint_S EdS = \pm E \oiint_S dS = \pm ES. \tag{2.32}$$

2. Si, en tous les points, le champ est dirigé parallèlement à S, on a $\vec{E}$ perpendiculaire à $d\vec{S}$ et l'intégrale donne zéro.
3. Si, en tous les points d'une surface S, le champ $\vec{E}$ est nul, alors l'intégrale donne zéro.

C'est ce qu'on va montrer à travers les divers exemples traités ci-dessous.

Exemple 3 :

Retrouvons à l'aide du théorème de Gauss, le résultat du champ créé à la distance a par un fil rectiligne infini portant une charge linéique constante négative $-\lambda$ C/m, (exemple 2, section 2.4).

Solution :

Le théorème de Gauss étant valable quelle que soit la forme de la surface fermée, le choix de la surface (dite *surface de Gauss*) sera celui qui offre le maximum de facilité pour le calcul. En général ce choix est dicté par la symétrie de la distribution de charge, donc du champ. Dans le cas du fil infini uniformément chargé, le champ est dirigé perpendiculairement au fil et possède le même module en tous les points situés à la même distance a du fil.

Le choix approprié de la surface de Gauss est un cylindre de rayon a et de longueur L. La surface fermée est la somme de la surface latérale S_1 et des deux surfaces de base S_2 et S_3 : $S = S_1 + S_2 + S_3$. Le flux à travers S est

$$\Phi = \int_{(S)} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_{(S_1)} \vec{E}_1 \cdot d\vec{S}_1 + \int_{(S_2)} \vec{E}_2 \cdot d\vec{S}_2 + \int_{(S_3)} \vec{E}_3 \cdot d\vec{S}_3, \quad (2.33)$$

où $\vec{E}_i$ est la valeur de $\vec{E}$ sur n'importe quel point de dS_i. Pour tout élément $\vec{dS}$ pris sur S_2 ou S_3, $\vec{E}$ et $\vec{dS}$ sont perpendiculaires, et par suite, aucun flux ne traverse S_2 et S_3. Donc,

$$\Phi = \int_{S_1} \vec{E}_1 \cdot d\vec{S}_1. \quad (2.34)$$

Sur S_1, $\vec{E}$ est antiparallèle à $\vec{dS}_1$ de sorte que $\vec{E} \cdot d\vec{S}_1 = -EdS_1$. Sachant, en plus, que $\vec{E}$ garde un module constant en tous les points de S_1, l'intégrale (2.34) donne

$$\Phi = \int_{S_1} -EdS_1 = -ES_1 = -E2\pi aL$$

Par simple observation de la figure, on voit que La charge contenue dans le cylindre vaut $-\lambda L$. En appliquant le théorème de Gauss, on a :

$$-E2\pi aL = \frac{-\lambda L}{\epsilon_0}, \text{ d'où l'on tire } E = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 a} = -\frac{2k\lambda}{a}. \quad (2.35)$$

qui est bien le résultat obtenu par un calcul direct à l'exemple 2. C'est beaucoup plus simple avec le théorème de Gauss. Il est utile de faire la remarque suivante. Le théorème de Gauss dit que les charges extérieures ne contribuent pas au flux du champ électrique mais elles contribuent au champ total $\vec{E}$. Ici, les charges extérieures sont dans la partie du fil extérieure au cylindre.

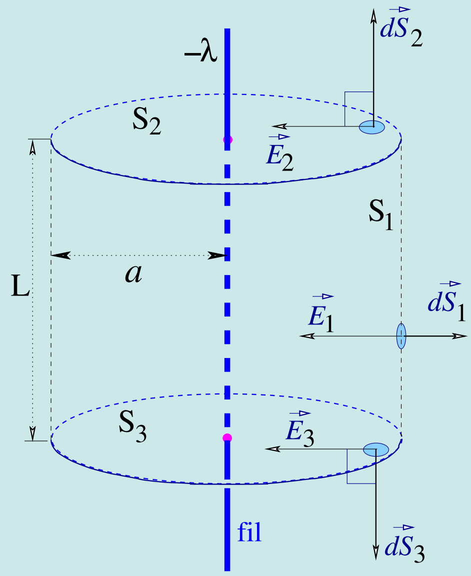


FIGURE 2.7 – Théorème de Gauss appliqué au calcul du champ créé à la distance a par un fil rectiligne infini portant une charge linéique constante négative $-\lambda$ C/m

2.6 Le potentiel électrique

Nous avons vu précédemment que quand une charge q' se trouve en un point où règne un champ électrique $\vec{E}$, elle ressent une force $\vec{F} = q'\vec{E}$. La force électrique $\vec{F}$ est une force conservative (قوة محافظة) et, de ce fait, elle dérive d'une énergie potentielle. Autrement dit, la charge q' possède aussi une énergie potentielle E_p telle que :

$$\boxed{\vec{F} = -\overrightarrow{grad}E_p} \equiv \frac{\partial E_p}{\partial x}\,\vec{i} + \frac{\partial E_p}{\partial y}\,\vec{j} + \frac{\partial E_p}{\partial z}\,\vec{k} \quad (2.36)$$

Quand $\vec{E}$ est produit par une charge ponctuelle q située à la distance r de q', alors $\vec{E} = (kq/r^2)\vec{u}_r$ et l'équation (2.36) devient :

$$q'\frac{kq}{r^2}\vec{u}_r = -\overrightarrow{grad}E_p \quad (2.37)$$

Comme le terme de gauche ne dépend que de r, il en sera de même du terme de droite et donc $\overrightarrow{grad}E_p = (dEp/dr)\vec{u}_r$; l'équation (2.37) s'écrit alors :

$$q'\frac{kq}{r^2} = -\frac{dEp}{dr} \quad (2.38)$$

d'où l'on tire

$$E_p = -\int q' \frac{kq}{r^2} dr = q' \frac{kq}{r} + C \tag{2.39}$$

L'énergie potentielle est définie à une constante C près. Quand il n'y a pas de charges à l'infini, le potentiel s'annule quand $r \to \infty$ et dans ce cas $C = 0$, ce qui donne :

$$E_p = q' \frac{kq}{r} \tag{2.40}$$

Sauf indication contraire, on se placera dans ce cas pour la suite de ce chapitre.

À l'équation (2.8), on a défini le champ électrique en un point comme la force ressentie par une charge unité placée en ce point. De la même façon, on introduit le concept de *potentiel électrique*, noté V, en un point comme l'énergie potentielle d'une charge unité placée en ce point, c'est-à-dire l'énergie potentielle par unité de charge. On écrit donc :

$$\boxed{V = \frac{E_p}{q'}} \to E_p = q'V \tag{2.41}$$

Le potentiel est une quantité scalaire (non vectorielle). En se basant sur l'équation précédente, on voit que l'unité SI de V est le joule par coulomb (J/C). Cette unité est appelée volt (V), en hommage au savant italien Alessandro Volta (1745-1827) : $1\,\mathrm{V} = 1\,\mathrm{J/C}$.

Des équations (2.40) et (2.41), on tire l'expression du potentiel créé par une charge ponctuelle q à la distance r :

$$\boxed{V = k\frac{q}{r}} \tag{2.42}$$

Dans le cas où V est créé par un ensemble de charges q_1, q_2, q_3, ..., il s'écrit :

$$\boxed{V = k\frac{q_1}{r_1} + k\frac{q_2}{r_2} + k\frac{q_3}{r_3} + \ldots = k\left(\frac{q_1}{r_1} + \frac{q_2}{r_2} + \frac{q_3}{r_3} + \ldots\right)} \tag{2.43}$$

2.7 Potentiel créé par une distribution continue de charges

Une charge élémentaire dq de la distribution crée à la distance r le potentiel élémentaire $dV = kdq/r$ et V_{total} s'obtient par intégration.

a) Pour une distribution volumique de densité de charges ρ (en C/m^3), un élément de volume dv pris sur la distribution porte la charge $dq = \rho dv$ et on a :

$$V_{\text{total}} = \iiint_{\text{volume}} k\frac{\rho dv}{r}\ (+constante). \tag{2.44}$$

b) Pour une distribution surfacique de densité de charges σ (en C/m^2), un élément de surface ds pris sur la distribution porte la charge $dq = \sigma ds$ et on a :

$$V_{\text{total}} = \iint_{\text{surface}} k\frac{\sigma ds}{r}\ (+constante). \tag{2.45}$$

c) Pour une distribution linéique de densité de charges λ (en C/m), un élément de longueur dl pris sur la distribution porte la charge $dq = \lambda dl$ et on a :

$$V_{\text{total}} = \int_{\text{ligne}} k\frac{\lambda dl}{r}\ (+constante). \tag{2.46}$$

Remarque : Dans le cas où les charges sont distribuées dans un volume de dimension finie, le potentiel tend vers 0 quand on s'éloigne à l'infini, ce qui fixe la *constante* à 0. Quand la distribution est infinie, on ne peut pas choisir $V = 0$ à l'infini. Dans ce cas, la *constante* est déterminée par le choix d'un potentiel de référence $V = V_0$ à une position autre que l'infini. Pour une distribution de charge infinie, il n'est généralement pas possible de calculer directement le potentiel créé par celle-ci. Il faut dans un premier temps calculer le champ électrique puis on utilise la relation $dV = -\vec{E} \cdot d\vec{r}$ pour obtenir le potentiel.

2.8 Le champ électrique dérivant du potentiel

Maintenant qu'on sait que $E_p = q'V$, l'équation (2.36) s'écrit :

$$q'\vec{E} = -\overrightarrow{grad}\, q'V, \tag{2.47}$$

soit, en simplifiant par q' (q' n'est pas affectée par le gradient) :

$$\boxed{\vec{E} = -\overrightarrow{grad}\, V} \tag{2.48}$$

En multipliant scalairement les 2 membres par $-d\vec{r}$, on a :

$$\overrightarrow{grad}\, V \cdot d\vec{r} = -\vec{E} \cdot d\vec{r}. \tag{2.49}$$

En le développant sur une base orthonormée ($\vec{i}$,$\vec{j}$,$\vec{k}$), le membre de gauche donne : $\left(\frac{\partial V}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial V}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial V}{\partial z}\vec{k}\right) \cdot (dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}) = \left(\frac{\partial V}{\partial x}dx + \frac{\partial V}{\partial y}dy + \frac{\partial V}{\partial z}dz\right)$. Mais $\left(\frac{\partial V}{\partial x}dx + \frac{\partial V}{\partial y}dy + \frac{\partial V}{\partial z}dz\right)$ n'est rien d'autre que la différentielle totale dV, ce qui conduit à :

$$\boxed{dV = -\vec{E} \cdot d\vec{r}}. \tag{2.50}$$

L'équation (2.50) est une forme équivalente à l'équation (2.48). Les deux formes sont à connaitre par coeur. L'équation (2.50) montre aussi que le potentiel peut s'exprimer en volts par mètre (V/m). C'est une unité équivalente au N/C, mais dans la pratique c'est le V/m qui est le plus utilisé.

2.9 Surfaces équipotentielles et lignes de champ

On appelle surface équipotentielle ou simplement équipotentielle une surface dont les points sont au même potentiel. De la définition on déduit les propriétés suivantes :

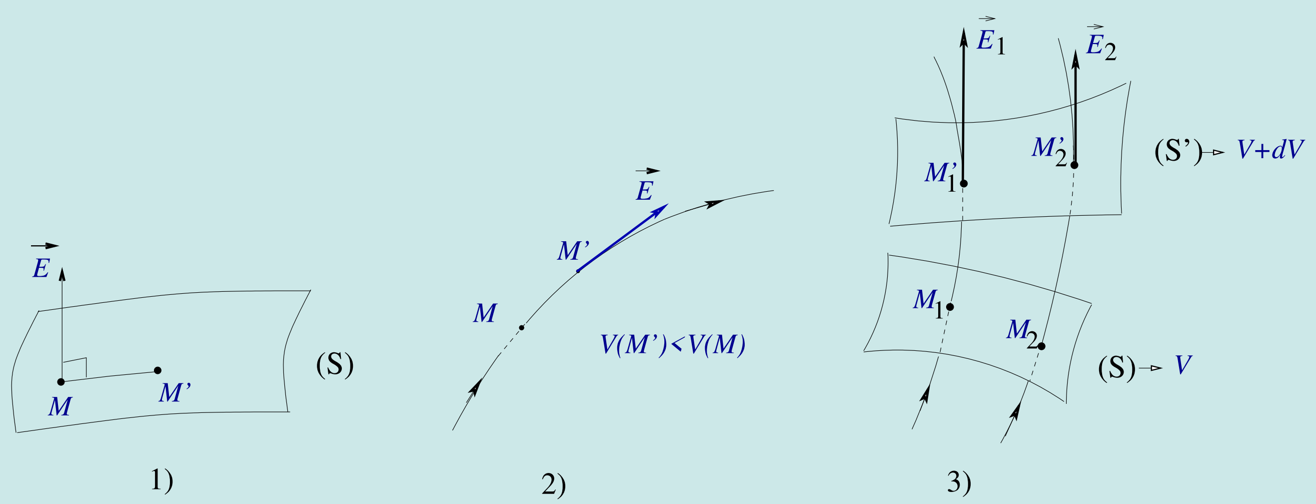


FIGURE 2.8 – 1) Lignes de champ ⊥ aux surfaces équipotentielles ; 2) Le potentiel diminue le long d'une ligne de champ ; 3) Surfaces équipotentielles plus serrées dans les régions de champ intense

1) Les lignes de champ sont toujours perpendiculaires aux surfaces équipotentielles. En effet, si on prend deux points M et M' infiniment proches ($\overrightarrow{MM'} = d\vec{r}$) sur une même surface équipotentielle (Figure 1 ci-dessous), alors $dV = V(M') - V(M) = 0$, il s'ensuit, d'après l'équation (2.50), que $\vec{E} \cdot \overrightarrow{MM'} = 0$ et donc $\vec{E}$ perpendiculaire en M à la surface. Ce résultat signifie aussi qu'aucun travail n'est requis pour déplacer une charge sur une équipotentielle.

2) Le potentiel diminue le long d'une ligne de champ. Autrement dit, les lignes de champ s'orientent vers les

potentiels décroissants. En effet (Figure 2 ci-dessous), pour un déplacement $d\vec{\ell} = \overrightarrow{MM'}$ (M et M' sont sur une ligne de champ), on a : $dV = -\vec{E} \cdot d\vec{\ell}$, mais pour M' infiniment proche de M, $\overrightarrow{MM'}$ est parallèle à $\vec{E}$, il s'ensuit : $dV = V(M') - V(M) = -\|\vec{E}\| \times \|d\vec{\ell}\| < 0$. On a donc $V(M) < V(M')$, ce qui démontre notre proposition.

3) Les surfaces équipotentielles sont plus serrées dans les régions de champ intense que dans les régions où le champ est moins intense. Pour le voir, considérons les surfaces équipotentielles (S) de potentiel V et (S') de potentiel $V + dV$ (Figure 3 ci-dessous). En allant sur une ligne de champ (i.e. perpendiculairement) d'un point M_1 de (S) à un point M_1' de (S'), on a : $dV = -\vec{E_1} \cdot d\vec{\ell_1} = - \mid \vec{E_1} \mid \mid d\vec{\ell_1} \mid$.
En allant sur une autre ligne de champ point M_2 de (S) à un point M_2' de (S'), on a : $dV = -\vec{E}_2 \cdot d\vec{\ell}_2 = - \mid \vec{E}_2 \mid \mid d\vec{\ell}_2 \mid$.
Si on suppose que le champ est plus intense dans la région de M_1, c'est-à-dire si $\mid \vec{E}_1 \mid > \mid \vec{E}_2 \mid$ alors $\mid d\vec{\ell}_1 \mid < \mid d\vec{\ell}_2 \mid$.

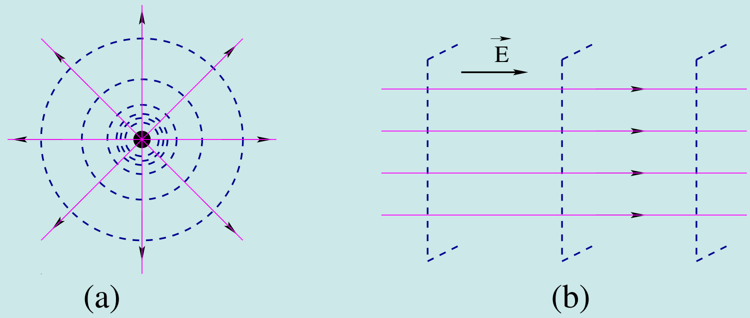


Figure 2.9 – Deux exemples dignes de champ (trait continu) et de surfaces équipotentielles (trait pointillé)

La figure 2.9 montre deux exemples de surfaces équipotentielles. En (a), les surfaces équipotentielles d'une charge ponctuelle qui sont bien sûr des sphères centrées sur la charge. En (b), les surfaces équipotentielles associées à un champ électrique constant. Nous avons, en même temps, représenté en trait tiré quelques lignes de champ pour montrer qu'elles sont effectivement perpendiculaires aux surfaces équipotentielles.

2.10 Le dipôle électrostatique

On appelle *dipôle électrique* un ensemble de deux charges égales et opposées $+q$ et $-q$, séparées par une distance d petite par rapport à la distance à laquelle on étudie les effets. La thérie des dipôles s'applique, entre autres, à certaines molécules dans lesquelles les centres de masse des charges positives et des charges négatives ne coïncident pas. Les molécules HCl et H_2O sont des exemples de molécules polaires, elle constitue un dipôle permanent. Dans une molécule non polaire, on peut induire un dipôle par l'action d'un champ électrique extérieur ; le dipôle induit disparaît si l'on supprime le champ.

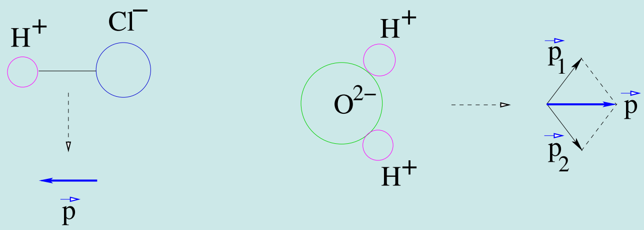


Figure 2.10 – Molécules HCl et H_2O avec leur dipôle ; la molécule d'eau est constituée de deux dipôles de résultante $\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}$.

Chapitre 3

Les conducteurs en équilibre électrostatique

3.1 Définition d'un état équilibre électrostatique

Nous avons mentionné au chapitre 1 qu' un conducteur est un corps dans lequel les électrons sont libres de se déplacer. Si on apporte des charges excédentaires à un conducteur, celles-ci vont interagir avec les charges (protons et électrons) du conducteur. Cette interaction électrostatique engendre une redistribution des électrons au sein du conducteur et conduit rapidement à un état où les charges cessent de bouger et se mettent dans un état d'équilibre, l'*équilibre électrostatique*. Il en découle un certain nombre de propriétés que nous développons ci-dessous.

1) Le champ électrostatique est nul ($\vec{E} = \vec{0}$) en tout point intérieur du conducteur.

En effet, sachant que les charges sont en équilibre ($\vec{F} = q\vec{E} = \vec{0}$) à l'intérieur du conducteur, on déduit que $\vec{E} = \vec{0}$.
Remarque : Si le conducteur est placé dans un champ extérieur, pour atteindre un état d'équilibre les charges à l'intérieur se réarrangent (se redistribuent) de manière à créer un champ qui compensent exactement le champ extérieur en chaque point à l'intérieur du conducteur.

2) Un conducteur à l'équilibre électrostatique constitue un volume équipotentiel.

Puisque le champ dérive d'un potentiel ($\vec{E} = -\vec{\nabla}V$), un champ nul entraîne que le potentiel associé est constant ($V =$ constante).

3) Les lignes de champ partant de ou arrivant à la surface d'un conducteur en équilibre sont perpendiculaires à la surface.

D'après ce qui précède, le champ à l'intérieur d'un conducteur (chargé ou non) est nul. Mais ce n'est pas forcément le cas à l'extérieur, en particulier si le conducteur est chargé. Puisque le potentiel est continu à la traversée d'une surface chargée, le potentiel à la surface aura même valeur que celle d'un point intérieur infiniment proche de la surface. On déduit que la surface du conducteur est au même potentiel que le conducteur et constitue donc une surface équipotentielle. Il s'ensuit que

4) Il est impossible à une ligne de champ qui émerge d'un conducteur de revenir vers le conducteur. Inversement, il est impossible à une ligne de champ qui arrive vers un conducteur d'être partie de ce conducteur.

Pour le démontrer, on considère deux points A et B situés sur la surface d'un conducteur en équilibre électrostatique et on va supposer qu'une ligne de champ part de A à B. Puisque la surface est équipotentielle, on doit avoir :

$$V_A = V_B \implies V_A - V_B = 0. \tag{3.1}$$

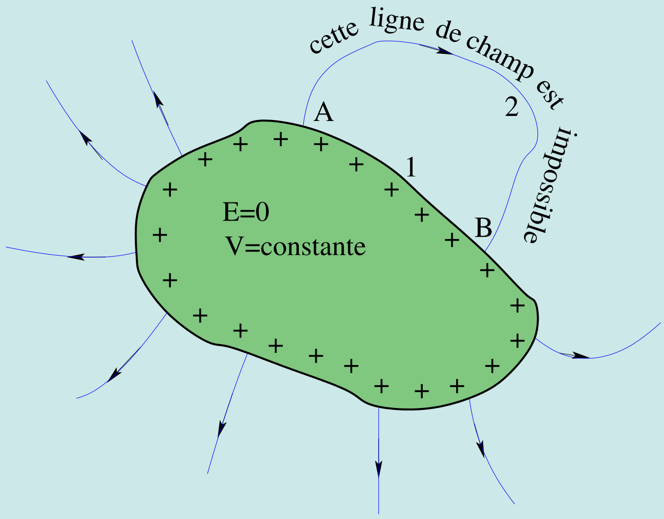


FIGURE 3.1 – La circulation de $\vec{E}$ de A à B est impossible suivant le chemin 2 si A et B sont deux points de la surface d'un conducteur en équilibre électrostatique.

Mais, en utilisant l'équation $dV = -\vec{E} \cdot \vec{d\ell}$ (voir section **??**), on doit avoir en même temps :

$$\int_{V_A}^{V_B} dV = -\int_A^B \vec{E} \cdot \vec{d\ell} \implies V_A - V_B = \int_A^B \vec{E} \cdot \vec{d\ell}. \tag{3.2}$$

$\vec{E}$ étant conservatif, l'intégrale $\int_A^B \vec{E} \cdot \vec{d\ell}$ ne dépend pas du chemin suivi pour aller de A à B, en particulier si $\vec{d\ell}$ est pris sur une ligne de champ. Mais on sait qu'en tous les points d'une ligne de champ, $\vec{E}$ est parallèle à $\vec{d\ell}$ et le produit scalaire $\vec{E} \cdot \vec{d\ell}$ est forcément $\neq 0$ (> 0 si on choisit $\vec{d\ell}$ dans le même sens que $\vec{E}$), on a donc :

$$\int_A^B \vec{E} \cdot \vec{d\ell} \neq 0. \tag{3.3}$$

L'égalité (3.1) et l'inégalité (3.3) nous montrent que l'égalité $V_A - V_B = \int_A^B \vec{E} \cdot \vec{d\ell}$ ne peut pas avoir lieu pour des points A et B sur la surface d'un conducteur en équilibre électrostatique. Autrement dit,

5) Quand un conducteur est chargé, les charges excédentaires, à l'équilibre celles-ci se répartissent nécessairement à la surface du conducteur.

Considérons une surface fermée à l'intérieur du conducteur. D'après la propriété 1, puisque la surface fermée est intérieure au conducteur, le champ est nul en tous les points de cette surface. Le théorème de Gauss implique que la charge totale contenue dans cette surface est nulle (il y a autant de charges $+$ que de charges $-$). Comme le montre la figure 3.2 (voir les pointillés), on peut choisir cette surface fermée de sorte qu'elle soit juste intérieure au conducteur. Puisque $\vec{E} = \vec{0}$ en tous les points de cette surface (propriété 1), on conclut qu'il n'y a aucune charge nette à l'intérieur du conducteur. Si un conducteur en équilibre porte des charges excédentaires, celles-ci se répartissent nécessairement à la surface du conducteur.

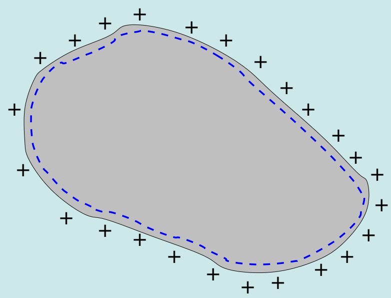


FIGURE 3.2 – Les charges excédentaires se trouvent à la surface.

3.1.1 Cas d'un conducteur creux

1- La figure Figure 3.3 montre une cavité vide creusée dans un conducteur. D'après ce qui précède (propriété 2), à l'équilibre tous les points intérieurs au conducteur sont au même potentiel. Pour les points A et B de la Figure 3.3, on a donc : $V_A = V_B$. Sachant que $V_A - V_B = \int_A^B \vec{E} \cdot \vec{d\ell}$, il vient $\int_A^B \vec{E} \cdot \vec{d\ell} = 0$. Puisque l'intégrale ne dépend pas du chemin suivi pour aller de A à B, elle doit donner 0 pour n'importe quel chemin, en particulier pour un chemin qui traverse la cavité (Figure 3.3). On conclut que

Le champ à l'intérieur de la cavité est également nul, ce qui implique que le potentiel à l'intérieur de la cavité est constant et égal par continuité au potentiel du conducteur ; les points du conducteur et de la cavité sont au même potentiel.

2- Prenons une surface fermée S comme indiquée en pointillés sur la Figure 3.3, le flux à travers S est

$$\Phi = \oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

où l'intégrale est effectuée sur la surface fermée S. Comme $\vec{E} = \vec{0}$, il s'ensuit que le flux est nul et que (théorème de Gauss) la surface fermée S ne contient aucune charge nette. Sachant qu'il n'y a pas de charges dans la masse du conducteur ni dans la cavité, on conclut qu'il n'y en pas non plus sur la surface de la cavité S_{int}.

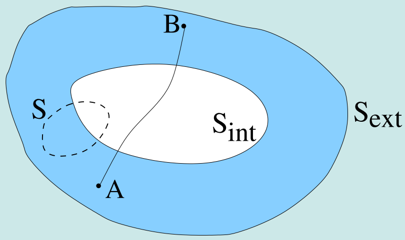


FIGURE 3.3 – Les charges non compensées se répartissent à la surface.

À l'équilibre, les charges excédentaires d'un conducteur creux ne peuvent se placer qu'à la surface extérieure de celui-ci.

3.2 Champ créé par un conducteur en équilibre en son voisinage immédiat : théorème de Coulomb

Considérons un point M extérieur et infiniment voisin de la surface S d'un conducteur. Le champ $\vec{E}$ en M est normal à S. Considérons une petite surface extérieure dS_{ext} passant par M parallèlement à S.

Ajoutons maintenant une surface S_{int} intérieure au conducteur et une surface latérale S_{lat} de manière à former une surface fermée. Sur la Figure 3.4, nous avons construit une surface fermée cylindrique, mais la surface n'a pas besoin d'être cylindrique. Écrivons le flux à travers la surface fermée. A priori, il y a trois contributions.

1) Le flux à travers S_{int} est nul parce que le champ y est nul.

2) Le flux à travers S_{lat} est nul parce que le champ est nul dans sa partie intérieure au conducteur d'une part, et d'autre part parce que le champ lui est perpendiculaire ($\vec{E}$ perpendiculaire à $d\vec{S}_{\text{lat}}$) dans sa partie extérieure.

3) Le flux à travers S_{ext} vaut $d\phi = \vec{E} \cdot d\vec{S}_{\text{ext}} = EdS_{\text{ext}}$ car $\vec{E} \parallel d\vec{S}_{\text{ext}}$. Si σ est la densité surfacique de charges sur la surface S du conducteur, la charge contenue dans la surface fermée est σdS_{ext} et le théorème de Gauss donne :

$$EdS_{\text{ext}} = \frac{\sigma dS_{\text{ext}}}{\epsilon_0}, \tag{3.4}$$

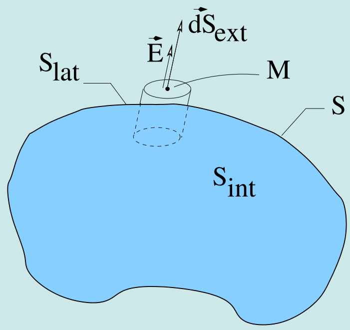


FIGURE 3.4 – Champ au voisinage d'un conducteur.

soit, après simplification par dS_{ext} :

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}. \tag{3.5}$$

Le résultat (3.5) est connu sous le nom de théorème de Coulomb qui énonce que *le champ électrique au voisinage immédiat d'un conducteur en équilibre est perpendiculaire à la surface du conducteur*. Si $\vec{n}$ est un vecteur unitaire dirigé vers l'extérieur normalement à S, on a : $\vec{E} = \sigma/\epsilon_0\, \vec{n}$.

Selon que la densité σ est positive ou négative, $\vec{E}$ est dirigé respectivement vers l'extérieur ou l'intérieur du conducteur. Lorsque le champ au voisinage d'un conducteur dépasse une certaine valeur limite, on observe une étincelle : le milieu entourant le conducteur devient conducteur de l'électricité. Ce champ limite, de l'ordre de 3×10^6 V/m, est appelé *champ disruptif*. Si le conducteur se trouve dans l'air, ce champ correspond à l'ionisation des molécules d'air.

3.3 Le condensateur

On appelle *condensateur* tout ensemble de deux conducteurs dont l'un porte la charge Q positive, appelée charge du condensateur, et l'autre la charge $-Q$ et où les surfaces en regard des deux conducteurs sont proches l'une de l'autre et séparées par un isolant (air, papier,...). Les deux conducteurs sont appelés *armatures* ou plaques du condensateur. Si V_+ et V_- sont leurs potentiels respectifs, on définit la capacité du condensateur par :

$$C = \frac{Q}{V_+ - V_-}. \tag{3.6}$$

La capacité est une quantité **positive**, elle donne la quantité de charge qu'un condensateur peut emmagasiner par unité de différence de potentiel entre ses armatures.

Pour communiquer des charges égales et opposées aux deux armatures d'un condensateur, on les relie pendant un court instant aux bornes d'une batterie, Figure 3.5 a. Une batterie (ou une pile) est un dispositif qui a la propriété de garder une différence de potentiel constante entre ses bornes. À l'équilibre, le potentiel de chaque armature est le même que celui de la borne à laquelle elle est connectée. La différence de potentiel entre les armatures est donc la même que celle entre les bornes de la batterie. Lorsque la batterie est débranchée, les charges restent sur les armatures grâce à leur mutuelle attraction. La Figure 3.5 b représente le schéma du circuit électrique associé à la Figure 3.5 a. Les piles et les batteries (appelées *générateurs*) sont symbolisées par une grande barre qui représente la borne positive et une petite barre plus épaisse qui représente la borne négative. Les figures 3.6 et 3.7 représentent respectivement le symbole d'un condensateur dans un circuit électrique et un exemple de condensateur vendu dans le commerce.

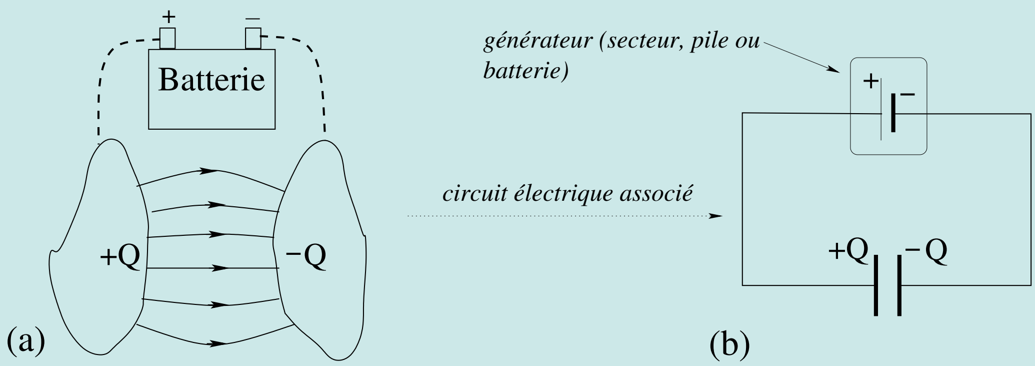


FIGURE 3.5 – Chargement des armatures avec une batterie.

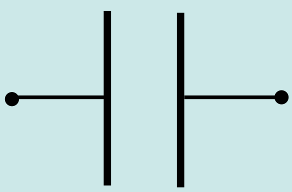


FIGURE 3.6 – Symbole du condensateur dans un schéma normalisé d'un circuit électrique.

FIGURE 3.7 – Un exemple de condensateur vendu dans le commerce.

3.4 Calcul de la capacité de quelques condensateurs typiques

3.4.0.1 Le condensateur plan

D'abord, rappelons que le champ créé par un plan infini chargé avec une densité σ uniforme s'écrit $\vec{E} = (\sigma/2\epsilon_0)\,\vec{n}$ où $\vec{n}$ est, par définition, un vecteur unitaire normal au plan et qui s'éloigne du plan, voir chapitre 2.

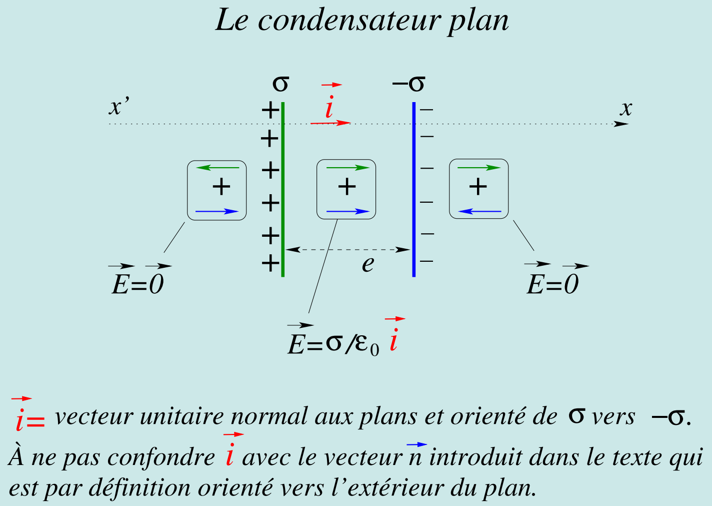


FIGURE 3.8 – Capacité d'un condensateur plan.

Considérons deux plans infinis parallèles séparés par une distance e, l'un chargé avec une densité positive σ, l'autre avec $-\sigma$, $\sigma =$ constante. Sur la Figure 3.8, les champs sont exprimés en fonction de $\vec{i}$, où $\vec{i}$ est un vecteur unitaire normal aux plans et orienté de σ à $-\sigma$. Notez qu'il n'a pas la même définition que $\vec{n}$. Le principe de superposition (somme des champs créés séparément par les deux plans) donne $\vec{E} = \vec{0}$ dans la région extérieure aux deux plans et $\vec{E} = (\sigma/\epsilon_0)\,\vec{i}$ entre les deux plans. Pour calculer la différence de potentiel entre les deux plans (les deux armatures), on utilise la relation $dV = -\vec{E}\cdot\vec{dr} = -(\sigma/\epsilon_0)\vec{i}\cdot\vec{dr}$. Du fait que $\vec{i}\cdot\vec{dr} = \vec{i}\cdot(dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}) = dx$, il vient :

$$\int_{V_\sigma}^{V_{-\sigma}} = -\int_0^e (\sigma/\epsilon_0)\,dx, \text{ soit } V_\sigma - V_{-\sigma} = \frac{\sigma e}{\epsilon_0}. \tag{3.7}$$

Dans la réalité, un condensateur plan est constitué de deux plaques parallèles (*ses deux armatures*) de dimensions finies. Elles ont donc une aire finie A et portent respectivement les charges $\sigma A = Q$ et $-\sigma A = -Q$.
Les effets de bords entraînent alors que le champ créé par ces deux plaques n'est pas rigoureusement constant entre les plaques et n'est pas rigoureusement nul à l'extérieur. Mais quand la distance e qui sépare les plaques est petite par rapport aux dimensions de celles-ci, on peut, avec une bonne approximation, calculer le champ en faisant comme si les plaques sont de dimensions infinies. Les résultats précédents peuvent alors s'appliquer. En fonction de Q, l'équation (3.7) s'écrit :

$$V_\sigma - V_{-\sigma} = Q\frac{e}{A\,\epsilon_0}. \tag{3.8}$$

La capacité C du condensateur plan est alors

$$C = \frac{Q}{V_\sigma - V_{-\sigma}} = \frac{A\,\epsilon_0}{e}. \tag{3.9}$$

3.4.1 Le condensateur sphérique

Considérons un condensateur constitué de deux armatures 1 et 2 sphériques , concentriques, de rayons respectifs R_1 et R_2 et séparées par du vide($R_1 < R_2$). Les armatures portent les charges $Q_1 = +Q$ et $Q_2 = -Q$. Le champ électrique est radial par raison de symétrie.

D'après le théorème de Gauss, le champ en un point situé entre les armatures à la distance r ($R_1 < r < R_2$) du centre s'écrit :

$$\vec{E} = \frac{+Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\vec{u_r}, \tag{3.10}$$

où $\vec{u_r}$ est un vecteur unitaire dirigé radialement vers l'extérieur. La différence de potentiel entre les armatures est donnée par la circulation de $-\vec{E}$ entre les deux armatures.
Si on choisit un trajet allant de l'armature 1 (potentiel V_+) à l'armature 2 (potentiel V_-), on a :

$$\int_{V_+}^{V_-} dV = \int_{R_1}^{R_2} -\vec{E}\cdot\vec{d\ell}, \tag{3.11}$$

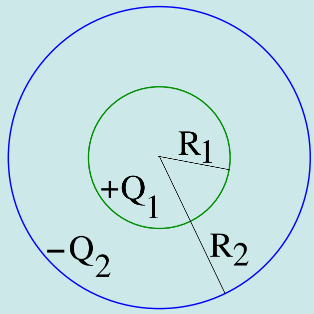


FIGURE 3.9 – Capacité d'un condensateur sphérique.

ou encore,

$$V_- - V_+ = -\int_{R_1}^{R_2} \frac{+Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\vec{u_r}\cdot\vec{d\ell}. \tag{3.12}$$

Le vecteur $\vec{u}_r$ étant unitaire, $\vec{u}_r \cdot \vec{d\ell}$ représente la projection de $\vec{d\ell}$ sur $\vec{u}_r$. Comme $\vec{u}_r$ est dirigé suivant le rayon-vecteur $\vec{r}$, on pose $\vec{u}_r \cdot \vec{d\ell} = dr$. L'équation (3.12) devient alors :

$$V_- - V_+ = -\int_{R_1}^{R_2} \frac{+Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}dr = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{-1}{r}\right]_{R_1}^{R_2} \tag{3.13}$$

soit

$$V_+ - V_- = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right). \tag{3.14}$$

On tire la capacité (voir définition équation (**??**)),

$$C = \frac{Q}{V_+ - V_-} = 4\pi\epsilon_0\frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1}. \tag{3.15}$$

Remarque : Si e désigne la séparation entre les deux sphères, on a : $R_2 - R_1 = e$. Si cette séparation est faible, les rayons des sphères sont pratiquement égaux et alors :

$$C = 4\pi\epsilon_0\frac{R_1^2}{e} = \frac{\epsilon_0\, S}{e}, \tag{3.16}$$

où S est la surface des sphères. On retrouve le résultat du condensateur plan. Quand les sphères sont faiblement séparées, le condensateur sphérique possède la même capacité qu'un condensateur plan dont l'aire des armatures est égale à celle des sphères.

3.4.1.1 Le condensateur cylindrique

Un condensateur cylindrique de longueur ℓ (très grande devant les rayons) et dont les armatures portent les charges $Q_1 = +Q$ et $Q_2 = -Q$ est schématisé ci-dessous. Calculons sa capacité. Le champ électrique est radial ici également. En un point entre les armatures situé à la distance r de l'axe, le théorème de Gauss donne :

$$E = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0\, r\ell}. \tag{3.17}$$

Comme dans le cas du condensateur sphérique, la différence de potentiel entre les armatures s'écrit :

$$V_2 - V_1 = -\int_{R_1}^{R_2} \frac{+Q}{2\pi\epsilon_0 r\ell}dr = -\frac{Q}{2\pi\epsilon_0\ell}\ln\frac{R_2}{R_1}. \tag{3.18}$$

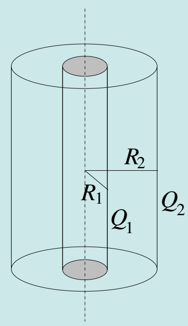


FIGURE 3.10 – Capacité d'un condensateur cylindrique.

Nous obtenons

$$C = \frac{Q}{V_1 - V_2} = \frac{2\pi\epsilon_0 \ell}{\ln{(R_2/R_1)}}. \tag{3.19}$$

Remarque : Si e désigne la séparation entre les deux cylindres, on a : $R_2 = R_1 + e = R_1(1 + e/R_1)$, $R_2/R_1 = 1 + e/R_1$ et $\ln{(R_2/R_1)} = \ln(1 + e/R_1)$. Quand $e \ll R_1$ (cylindres faiblement séparés), on a : $e/R_1 \ll 1$ et par suite $\ln(1 + e/R_1) \approx e/R_1$. La capacité du condensateur cylindrique prend alors la forme :

$$C = \frac{2\pi\epsilon_0 \ell}{e/R_1} = \frac{\epsilon_0 2\pi R_1 \ell}{e} = \frac{\epsilon_0 \, S}{e}, \tag{3.20}$$

où S est la surface latérale des cylindres. Là aussi, on retrouve le résultat du condensateur plan. Quand les cylindres sont faiblement séparées, le condensateur cylindrique possède la même capacité qu'un condensateur plan dont l'aire des armatures est égale à celle des cylindres.
Comme on l'a dit dans le texte, la capacité dépend à chaque fois des facteurs géométriques (rayon, longueur ou surface des armatures et leur séparation).

3.5 Association de condensateurs

On peut associer (grouper, combiner) un ensemble de plusieurs condensateurs de diverses façons et déterminer la *capacité équivalente* du groupement, c'est-à-dire la capacité du condensateur unique équivalent à l'ensemble. Nous allons décrire ci-dessous les deux combinaisons les plus connues : assciation en *parallèle* et association en *série.*

3.5.1 Association de condensateurs en parallèle

Considérons n condensateurs de capacité C_i, $(i = 1,...,n)$. On obtient une association parallèle en les groupant comme sur la Figure 3.11 a. Les extrémités gauches de tous les condensateurs sont connectées au point A (borne + d'une batterie) et les extrémités droites sont connectées à la borne $-$ (point B). On voit donc que tous les condensateurs se trouvent soumis à la même différence de potentiel $V = V_A - V_B$.
Du fait de cette différence de potentiel, le condensateur C_1 porte la charge Q_1, le condensateur C_2 porte la charge Q_2, le condensateur C_3 porte la charge Q_3, ...
Ces charges sont données par : $Q_1 = C_1 V,\ Q_2 = C_2 V,\ Q_3 = C_3 V, ..., Q_n = C_n V$. La charge électrique totale du groupement est : $Q = \sum_i Q_i = (C_1 + C_2 + ... + C_n)V$. On déduit la capacité du groupement :

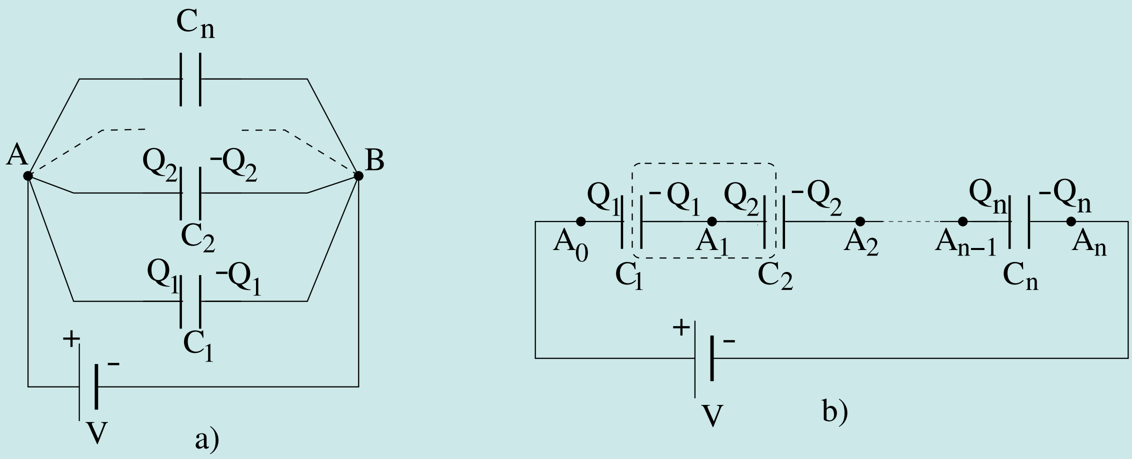


FIGURE 3.11 – Association de condensateurs a) en parallèle, (b) en série.

$$C = \frac{Q}{V} \rightarrow \boxed{C = C_1 + C_2 + ... + C_n.} \tag{3.21}$$

Un groupement parallèle de condensateurs de capacité C_1, C_2, C_3, ... est équivalent à un condensateur unique de capacité C égale à la somme des capacités indiduelles. On déduit que la capacité C du groupement est toujours supérieure à la plus grande des capacités individuelles. Si on veut une capacité plus grande que celles qui sont à notre disposition, il faut combiner en parallèle.

3.5.2 Association de condensateurs en série

La combinaison de n condensateurs en série est montrée sur la Figure 3.11 b. L'extrémité droite de l'un est connectée à l'extrémité gauche de l'autre. L'ensemble est mis sous la différence de potentiel V. Cette différence de potentiel va engendrer sur chacun des condensateurs la charge $Q_1 = C_1\, V_1$, $Q_2 = C_2\, V_2$, ... Si les condensateurs sont initialement neutres, le morceau encadré (morceau autour de A_1) restera globalement neutre même après l'application de la différence de potentiel. Il vient

$$Q_2 + (-Q_1) = 0 \implies Q_1 = Q_2. \tag{3.22}$$

Ce résultat est valable évidemment entre les condensateurs 2 et 3, entre 3 et 4, et ainsi de suite, ce qui conduit à :

$$Q_1 = Q_2 = Q_3 = \ldots = Q_n. \tag{3.23}$$

Lorsque des condensateurs initialement neutres sont combinés en série, ils acquièrent tous la même charge. En appelant cette charge Q et en utilisant la relation $Q_i = C_i V_i$, $i = 1{,}2, \ldots$, la différence de potentiel aux extrémités de chaque condensateur est :

$$V_1 = Q/C_1, \quad V_2 = Q/C_2, \ldots, \quad V_n = Q/C_n.$$

La différence de potentiel totale est :

$$V = V_1 + V_2 + \ldots + V_n = Q\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + ... + \frac{1}{C_n}\right).$$

On déduit la capacité

$$C = \frac{Q}{V} \to \boxed{C = \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \ldots + \frac{1}{C_n}\right)^{-1}, \text{ ou bien } \frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \ldots + \frac{1}{C_n}.} \tag{3.24}$$

L'inverse de la capacité C d'un ensemble de condensateurs associés en série est égale à la somme des inverses des capacités individuelles. Un tel enssemble est équivalent est à un condensateur unique de capacité C. La capacité C du groupement en série est toujours <u>inférieure</u> à la plus petite des capacités individuelles.

Il arrive qu'on ait dans un même circuit un groupement *mixte*, i.e. des groupements en série et des groupements en parallèle. Pour avoir la capcité équivalente du groupement *mixte*, on traite d'abord les groupements simples identifiables à l'intérieur du groupement mixte, puis on remplace chaque groupement par leur résistance équivalente et enfin on calcule la résistance totale équivalente de chaque résistance équivalente partielle.

Mais des montages plus complexe où la combinaison de condensateurs n'est ni en parallèle ni en série peuvent être rencontrés. Dans ce cas, pour trouver la capacité équivalente, il faut chercher à se ramener à la relation $Q = C_{\text{équiv}} V$ reliant la tension V aux bornes du groupement à la charge totale Q du groupement.

3.6 Énergie potentielle électrique emmagasinnée dans un condensateur

Le chargement d'un condensateur consiste à transférer des charges de la plaque à faible potentiel vers la plaque à potentiel plus élevé. Plus concrétement, quand on branche un condensateur neutre aux bornes d'une pile, la pile fait transférer des électrons, de la plaque connectée à la borne + de la pile vers la plaque connectée à la borne −. La plaque connectée à la borne + se charge positivement car elle est en défaut d'électrons et la plaque connectée à la borne −, en excès d'électrons, se charge négativement. Le processus de chargement requiert donc une dépense d'énergie. À à un certain moment du processus, la charge transférée est q, ($+q$ sur la plaque + et $-q$ sur la plaque −) et alors la différence de potentiel aux bornes du condensteur est : $v = q/C$, C étant la capacité du condensteur. Le transfert d'une charge supplémentaire dq nécessite un travail :

$$dW = dq\, v = \frac{q}{C}\, dq. \tag{3.25}$$

Le travail total nécessaire pour augmenter la charge transférée de 0 à Q [1] est :

$$W = \int_0^Q \frac{q}{C}\, dq = \frac{1}{2}\left[\frac{q^2}{C}\right]_0^Q = \frac{Q^2}{2C}. \tag{3.26}$$

1. Le maximum de charge qu'on peut transférer est déterminée par le produit de la force électromotrice E de la pile par la capacité C du condensateur : $Q_{\max} = CE$.

Ce travail est emmagasiné sous forme d'énergie potentielle électrique U_{el} dans le condensateur, donc :

$$U_{el} = \frac{Q^2}{2C}. \tag{3.27}$$

À la fin du processus, la différence de potentielle entre les plaques est $V = Q/C$ et le résultat précédent peut aussi s'écrire :

$$U_{el} = \frac{Q^2}{2C} = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{1}{2}QV. \tag{3.28}$$

Densité d'énergie Parfois, on considère que l'énergie est emmagasinée dans le champ électrique régnant entre les plaques du condensateur. Dans le cas particulier du condensateur plan, le volume entre les plaques est : $A\,e$. L'énergie potentielle électrique par unité de volume, appelée densité d'énergie et notée u, s'écrit :

$$u = U_{el}/(\text{unité de volume}) = \frac{1}{2}CV^2/(A\,e). \tag{3.29}$$

Le champ entre les plaques étant constant on a : $V = Ee$, et par suite

$$u = \frac{1}{2}CE^2\,e^2/(A\,e) = \frac{1}{2}CE^2\,e/A. \tag{3.30}$$

Sachant que pour un condensateur plan (voir équation (3.9)) $C = \epsilon_0 A/e$, il vient :

$$u = \frac{1}{2}\frac{\epsilon_0 A}{e}\frac{E^2 e}{A} = \frac{1}{2}\epsilon_0\,E^2. \tag{3.31}$$

La densité d'énergie s'écrit finalement :

$$u = \frac{1}{2}\epsilon_0\,E^2. \tag{3.32}$$

L'expression (3.32) ne fait pas référence au condensateur, elle ne dépend que de E. Même si elle a été établie à partir du cas particulier du condensateur plan, elle est valable en tout point de l'espace où règne un champ électrique E.

3.7 Questions

On charge une sphère conductrice de rayon 0.5m avec des milliards de milliards d'électrons et l'équilibre électrostatique s'établit. Le champ électrique à la surface de la sphère vaut 550 V/m.

1) Comment les électrons excédentaires se distribuent-ils sur la sphère ? 2) Considérons une charge test se déplaçant entre deux à l'intérieur de la sphère. Que vaut le travail fait sur la charge par le champ électrique ?

Choisir une réponse :
☐ A- 1) La charge est distribuée uniformément sur la surface de la sphère. 2) Le travail fait par le champ électrique est 0 J.
☐ B- 1) La charge réside nulle part sur la surface de la sphère. 2) Le travail fait par le champ électrique est 1 J.
☐ C- 1) La charge réside à l'intérieur de la sphère. 2) Le travail fait par le champ électrique est 8 J.
☐ D- 1) La charge réside quelque part sur la surface de la sphère. 2) Le travail fait par le champ électrique est 5 J.