Université : Batna2
Département : Mathématiques et Informatique
Module : Algèbre I

Des exercices supplémentaires

Exercice 1

Compléter les pointillés par le connecteur logique qui s´impose : $\Leftrightarrow$, $\Leftarrow$, $\Rightarrow$.

1. $x \in \mathbb{R}\,;\, x^2 = 4 \cdots\ x = 2\,;$
2. $x \in \mathbb{C}\,;\, z = \overline{z} \cdots\ z \in \mathbb{R}\,;$
3. $x \in \mathbb{R}\,;\, x = \pi \cdots\ e^{2i\pi} = 1.$

Exercice 2

Soient P et Q deux propositions. Simplifier l´expréssion R tel que :

$$R = (\overline{P} \wedge Q) \vee (\overline{P} \wedge \overline{Q}) \vee (P \wedge Q).$$

(utilisez table de vérité).

Exercice 3

Écrire sous forme normale conjonctive et sous forme normale disjonctive les propositions suivantes :

1. $\overline{\overline{p} \wedge q} \Rightarrow r.$
2. $\overline{p \vee \overline{q}} \wedge (s \Rightarrow t).$
3. $\overline{(p \wedge q)} \wedge (p \vee q).$

(utilisez l´équivalence $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\overline{p} \vee q)$).

Exercice 4

Soient p, q et r trois assertions. Montrer les équivalences qui suivent :

1. $p \Rightarrow (q \Rightarrow r) \Leftrightarrow (p \wedge q \Rightarrow r).$
2. $(p \vee q) \Rightarrow r \Leftrightarrow (p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r).$
3. $(p \wedge q) \Rightarrow r \Leftrightarrow (p \Rightarrow r) \vee (q \Rightarrow r).$
4. $p \Rightarrow (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow r).$
5. $p \Rightarrow (q \vee r) \Leftrightarrow (p \Rightarrow q) \vee (p \Rightarrow r).$

(utilisez table de vérité).

Exercice 5

Déterminer parmi les propositions suivantes les quelles vrais :

1. 136 est multiple de 17 et 2 divise 167.
2. $(\exists x \in \mathbb{R}, x + 1 = 0)$ et $(\exists x \in \mathbb{R}, x + 2 = 0)$.

3. $\forall x \in \mathbb{R},\ x+1 \neq 0$ ou $x+2 \neq 0$.
4. $\exists x \in \mathbb{R}^*, \forall y \in \mathbb{R}^*, \forall z \in \mathbb{R}^*, z - xy = 0$.
5. $\forall y \in \mathbb{R}^*, \exists x \in \mathbb{R}^*, \forall z \in \mathbb{R}^*, z - xy = 0$.
6. $\forall y \in \mathbb{R}^*, \forall z \in \mathbb{R}^*, \exists x \in \mathbb{R}^*, z - xy = 0$.
7. $\exists a \in \mathbb{R}, \forall \epsilon > 0, |a| < \epsilon$.
8. $\forall \epsilon > 0, \exists a \in \mathbb{R}, |a| < \epsilon$.

Exercice 6

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction. Nier les assertions suivantes :

1. $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \neq 0$;
2. $\forall M > 0,\ \exists A > 0,\ \forall x \geq A,\ f(x) > M$;
3. $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) > 0 \implies x \leq 0$;
4. $\forall \epsilon > 0,\ \exists \eta > 0, \forall (x,y) \in I^2,\ \big(|x-y| \leq \eta \implies |f(x) - f(y)| \leq \epsilon\big)$.

Exercice 7

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Exprimer à l`aide de quantificateurs les assertions suivantes :

1. f est majorée ;
2. f est bornée ;
3. f est paire ;
4. f est impaire ;
5. f ne s´annule jamais ;
6. f est périodique ;
7. f est croissante ;
8. f est strictement décroissante ;
9. f n´est pas la fonction nulle ;
10. f n´est jamais les même valeurs en deux points distincts ;
11. f atteint toutes les valeurs de $\mathbb{N}$.
12. f est inférieur à g.
13. f n´est pas inférieur à g.

Exercice 8

En utilisant un raisonnement par l´absurde, démontrer que :

1. Démontrer que si $a, b \in \mathbb{Z}$ tels que $a + b\sqrt{2} = 0$, alors $a = b = 0$
2. Soit $n > 0$. Démontrer que si n est le carré d´un entier, alors 2n n´est pas le carré d´un entier

Exercice 9

Soit P la propriété suivante :

P : si l´entier $(n^2 - 1)$ n´est pas divisible par 8, alors l´entier n est pair.

1. Ecrire la contraposée de la proposition précédente.
2. En remarquant qu´un entier impair n s´écrit sous la forme $n = 4k + r$ avec $k \in \mathbb{N}$ et $r \in \{1, 3\}$ (à justifier), prouver la contraposée.
3. A-t-on démontré la proprité de l´énoncé ?

Exercice 10

On souhaite démontrer par récurrence que pour tout entier n et pour tout réel $x > 0$, on a $(1 + x)^n \geq 1 + nx$

1. La récurrence porte-t-elle sur n ? Sur x ? Sur les deux ?
2. Énoncer l´hypothèse de récurrence.
3. Rédiger la démonstration.

Exercice 11

1. Montre $\forall n \in N, n(n + 1)$ est divisible par 2(démonstration cas par cas).
2. Est-que : $\forall x \in R$ on a : $x < 2 \Rightarrow x^2 < 4$? (centre exemple).