Chapitre 2

Ensemble et application

2.1 Ensemble

Définition 2.1. *Un ensemble est une collection d'éléments.*

Exemple 2.1. 1. *On désigne par $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N} = \{0, 1, \ldots\}$.*

2. *L'ensemble $E = \{0, 1\}$.*

2.1.1 Inclusion

Soient E et F deux ensembles. On dit que E est inclue dans F (E est un sous ensemble de F ou E est une partie de F) et on note $E \subset F$, si tous les éléments de E sont des éléments de F.

$$E \subset F \Longleftrightarrow (\forall x, x \in E \Longrightarrow x \in F).$$

Exemple 2.2. 1. *On désigne $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombre réels on a : $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$.*

2. *On désigne $\mathbb{Z}$ l'ensemble des nombre entiers relatifs, $\mathbb{Q}$ l'ensemble des rationnels on a :*

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}.$$

Notation 2.1. *l'ensemble des parties de E est noté $\mathcal{P}(E)$, i.e.,*

$$\mathcal{P}(E) = \{A \,/\, A \subset E\}.$$

Remarque 2.1. — *On a* $\emptyset \subset E$ *et* $E \subset E$.

— *Si* A, B *et* C *sont des parties de* E, *alors :*

1. $A \not\subset B \Longleftrightarrow (\exists x, x \in A \wedge x \notin B)$.
2. $(A = B) \Longleftrightarrow (A \subset B \wedge B \subset A)$.
3. $(A \subset B \wedge B \subset C) \Longrightarrow (A \subset C)$.

Exemple 2.3. *Soit* $E = \{1, 2, 3\}$. *Alors*

$$\mathcal{P}(E) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, E\}.$$

2.1.2 Union

Définition 2.2. *Soit* A *et* B *deux ensembles. La réunion ou l'union de* A *et* B *est l'ensemble des éléments qui sont dans* A *ou dans* B *et noté par* $A \cup B$.

$$A \cup B = \{x \in E : x \in A \vee x \in B\}.$$

$$(x \in A \cup B) \Longleftrightarrow (x \in A \text{ ou } x \in B).$$

Remarque 2.2. $(x \notin A \cup B) \Longleftrightarrow (x \notin A$ *et* $x \notin B)$

Exemple 2.4. *Soient* $A = \{1, 3, 5\}$ *et* $B = \{1, x, y\}$. *Alors*

$$A \cup B = \{1, 3, 5, x, y\}.$$

2.1.3 Intersection

Définition 2.3. *Soit* A *et* B *deux ensembles. L'intersection de* A *et* B *est l'ensemble des éléments qui sont à la fois dans* A *et dans* B *et noté par* $A \cap B$.

$$A \cap B = \{x \in E : x \in A \wedge x \in B\}.$$

$$(x \in A \cap B) \Longleftrightarrow (x \in A \text{ et } x \in B).$$

Remarque 2.3. $(x \notin A \cap B) \Longleftrightarrow (x \notin A$ *ou* $x \notin B)$

Exemple 2.5. *Soient* $A = \{1, 3, 5\}$ *et* $B = \{1, x, y\}$*. Alors*

$$A \cap B = \{1\}.$$

Propriétés 2.1. *Soient* A*,* B *et* C *trois ensembles :*

1. $A \subset A \cup B$*,* $B \subset A \cup B$*.*
2. $A \cap B \subset A$*,* $A \cap B \subset B$*.*
3. $A \cap B \subset A \cup B$*.*
4. $A \cap A = A$*,* $A \cup A = A$*.*
5. $\emptyset \subset A$*,* $\emptyset \cap A = \emptyset$*,* $\emptyset \cup A = A$*.*
6. $A \cap B = B \cap A$ *(commutativité de l'intersection).*
7. $A \cup B = B \cup A$*. (commutativité de la réunion).*
8. $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ *(associativité de l'intersection).*
9. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$*(associativité de la réunion).*
10. $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (A \cap C)$*.*
11. $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (A \cup C)$*.*

2.1.4 Déférence ensembliste- Différence symétrique

Définition 2.4. *Soit* A *et* B *deux ensembles de* E*. La différence ensembliste de* A *et de* B *est l'ensemble des éléments de* A *qui ne sont pas dans* B*, noté* $A \setminus B$ *ou* $A - B$

$$A \setminus B = \{x \in E : x \in A \text{ et } x \notin B\}.$$

Si $A \subset B$ alors $A \setminus B$ est aussi appelé le complémentaire de A dans B, il est noté A^c ou C_B^A

$$C_B^A = \{x / x \in B \text{ et } x \notin A\}.$$

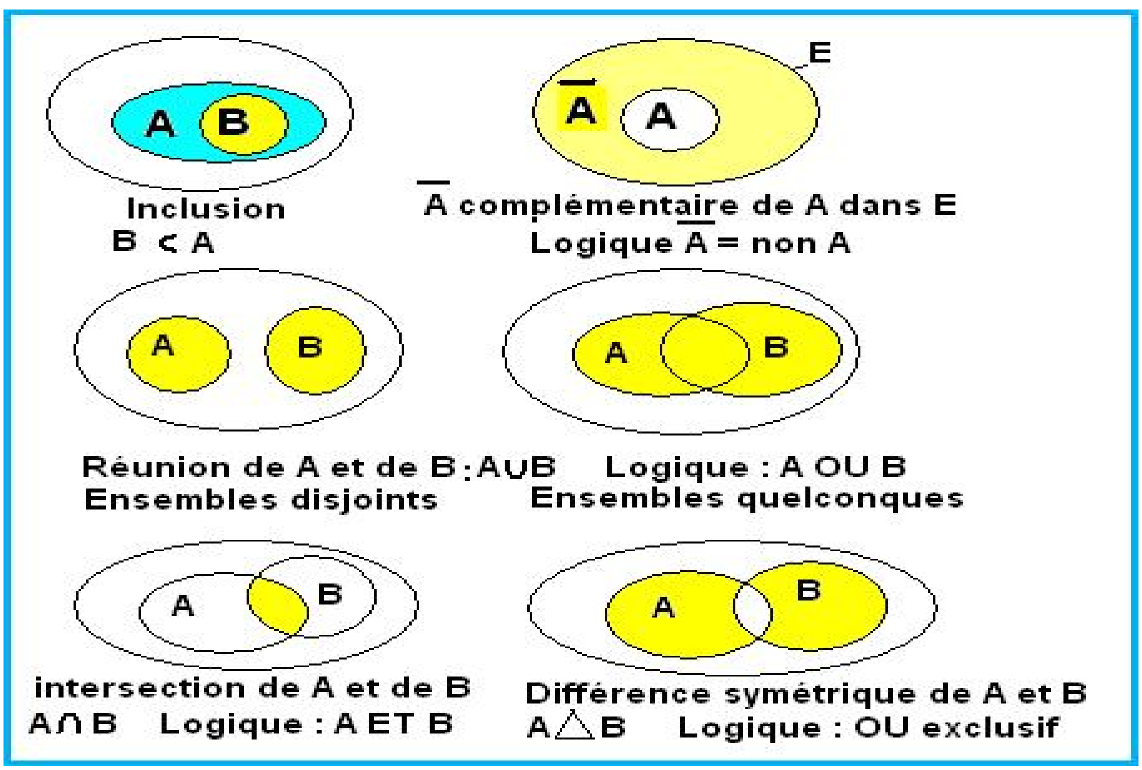
Définition 2.5. *Soient* E *un ensemble non vide et* $A, B \subset E$*, la différence symétrique entre deux ensembles* A*,* B *est l'ensemble des éléments qui appartiennent à* $A \setminus B$ *ou* $B \setminus A$ *notée* $A \triangle B$

$$\begin{aligned} A \triangle B &= (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \\ &= (A \cup B) \setminus (B \cup A) \end{aligned}$$

$$x \in A \triangle B \iff \{x \in (A \setminus B) \vee x \in (B \setminus A)\}.$$

Propriétés 2.2. *Soient A et B deux parties d'un ensemble E on a :*

1. $x \in A^c \iff x \notin A$.
2. $A \setminus A = \emptyset$.
3. $A \setminus \emptyset = A$.
4. $A \cup A^c = E$.
5. $A \cap A^c = \emptyset$.
6. $(A^c)^c = A$.
7. $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$ *Lois de Morgan.*
8. $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ *Lois de Morgan.*
9. $(A \subset B) \iff (B^c \subset A^c)$.



2.1.5 Produit cartésien

Définition 2.6. *Soient A, B deux ensembles. Le produit cartésien de A par B est l'ensemble des couples (a, b) tels que $a \in A$ et $b \in B$. Cet ensemble sera noté par $A \times B$*

$$A \times B = \{(a, b) : a \in A \text{ et } b \in B\}.$$

Remarque 2.4. *1. Plus généralement, si $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sont n ensembles,*

$$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) : a_i \in A_i,\ i = 1, 2, \ldots, n\}.$$

L'ensemble $A_1 \times A_1 \times \ldots \times A_1$ est noté aussi $\prod_{i=1}^{n} A_i$ et $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ est appelée n-uplet de $A_1 \times A_1 \times \ldots \times A_1$.

Si $A_1 = A_2 = \ldots = A_n$, on note

$$\begin{aligned} A_1 \times A_1 \times \ldots \times A_1 &= A \times A \times \ldots \times A \\ &= A^n. \end{aligned}$$

Exemple 2.6. *Soient $E = \{1, 2, 3, 5, 8, 9, x, y\}$, $A = \{1, 2, 3\}$ et $B = \{1, 2, 9\}$*

1. — $A \subset E$ et $B \subset E$.
   — $A \not\subset B$ car $(3 \in A) \wedge (3 \notin B)$.
   — $B \not\subset A$ car $(9 \in B) \wedge (9 \notin A)$.
2. — $A \cap B = \{1, 2\}$.
   — $A \cup B = \{1, 2, 3, 9\}$.
3. — $A \setminus B = \{3\}$.
   — $B \setminus A = \{9\}$.
4. $A \triangle B = \{3, 9\}$.
5. $A \times B = \{(1, 1), (1, 2), (1, 9), (2, 1), (2, 2), (2, 9), (3, 1), (3, 2), (3, 9)\}$.