Chapitre 3

Relations binaires sur un ensemble

3.1 Relation d'équivalence

Définition 3.1. *Soit $\mathcal{R}$ une relation binaire sur E. $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence si :*

1. *$\mathcal{R}$ est réflexive :*
$$\forall x \in E,\ x\mathcal{R}x.$$
2. *$\mathcal{R}$ est symétrique :*
$$\forall x, y \in E,\ x\mathcal{R}y \Longrightarrow y\mathcal{R}x.$$
3. *$\mathcal{R}$ est transitive :*
$$\forall x, y, z \in E,\ [x\mathcal{R}y \wedge y\mathcal{R}z] \Longrightarrow x\mathcal{R}z.$$

Exemple 3.1. *On considère la relation suivante sur $\mathbb{Z}$:*
$$\forall x, y \in \mathbb{Z},\ x\mathcal{R}y \Longleftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z},\ x - y = 2k.$$
Est une relation d'équivalence.

1. *$\mathcal{R}$ est réflexive : Soit $x \in \mathbb{Z}$, on a*
$$\begin{aligned} x - x = 2 \times 0 &\Longrightarrow x\mathcal{R}x \\ &\Longrightarrow \mathcal{R} \text{ est réflexive .} \end{aligned}$$

2. *$\mathcal{R}$ est symétrique :*

   Soient $x, y \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned} x\mathcal{R}y &\Longleftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, x - y = 2k \\ &\Longrightarrow y - x = 2k' \; (k' = -k \in \mathbb{Z}) \\ &\Longrightarrow \mathcal{R} \text{ est symétrique .} \end{aligned}$$

3. *$\mathcal{R}$ est transitive : Soient $x, y, y \in \mathbb{Z}$, on a*

$$\begin{aligned} x\mathcal{R}y \wedge y\mathcal{R}z &\Longleftrightarrow \begin{cases} \exists k \in \mathbb{Z},\ x - y = 2k.........(1) \\ \wedge \\ \exists k' \in \mathbb{Z},\ y - z = 2k'........(2) \end{cases} \\ (1) + (2) &\Longrightarrow x - z = 2k'',\ (k'' = (k - k') \in \mathbb{Z}) \\ &\Longrightarrow x\mathcal{R}z \\ &\Longrightarrow \mathcal{R}\text{est transitive.} \end{aligned}$$

Alors $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.

3.1.1 Classe d'équivalence

Définition 3.2. *Si $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence dans un ensemble E, la classe d'équivalence de $x \in E$ est l'ensemble*

$$\dot{x} = \{y \in E \,/\, x\mathcal{R}y\}.$$

Notation 3.1. *On note par $E/\mathcal{R}$ (ensemble de quotient de E par $\mathcal{R}$) l'ensemble des classes d'équivalence de $\mathcal{R}$*

$$E/\mathcal{R} = \{\dot{x} \,/\, x \in E\}.$$

Exemple 3.2. *Dans l'exemple précédent donnez $\dot{x}$ et $E/\mathcal{R}$*

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \{y \in \mathbb{Z} \,/\, x\mathcal{R}y\} \\ &= \{y \in \mathbb{Z} \,/\, x - y = 2k\} \\ &= \{x - 2k \,/\, k \in \mathbb{Z}\} \\ &= \{\ldots, x - 4, x - 2, x, x + 2, x + 4, \ldots\}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\dot{0} &= \{y \in \mathbb{Z} \,/\, 0\mathcal{R}y\}\\ &= \{\ldots, -4, -2, 0, 2, 4, \ldots\}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\dot{1} &= \{y \in \mathbb{Z} \,/\, 1\mathcal{R}y\}\\ &= \{\ldots, -3, -1, 1, 3, \ldots\}.\\ \dot{2} &= \dot{0}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{Z}/\mathcal{R} &= \{\dot{x} \,/\, x \in \mathbb{Z}\}.\\ \mathbb{Z}/\mathcal{R} &= \{\dot{0}, \dot{1}\}.\end{aligned}$$

Proposition 3.1. *Soit $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence dans un ensemble E. Alors,*

— $\forall x \in E,\ \dot{x} \subset E.$

— $\forall x \in E,\ \dot{x} \neq \emptyset.$

— $\forall x, y \in E,\ x\mathcal{R}y \Longrightarrow \dot{x} = \dot{y}.$

3.2 Relations d'ordre

Définition 3.3. *Soit $\mathcal{R}$ une relation binaire sur E. C'est une relation d'ordre si :*

1. *$\mathcal{R}$ est réflexive :*

$$\forall x \in E,\ x\mathcal{R}x.$$

2. *$\mathcal{R}$ est antisymétrique :*

$$\forall x, y \in E,\ [x\mathcal{R}y \wedge y\mathcal{R}x] \Longrightarrow x = y.$$

3. *$\mathcal{R}$ est transitive :*

$$\forall x, y, z \in E,\ [x\mathcal{R}y \wedge y\mathcal{R}z] \Longrightarrow x\mathcal{R}z.$$

Définition 3.4. *Soit $\mathcal{R}$ un ordre dans E.*

— *Une relation d'ordre $\mathcal{R}$ sur un ensemble E est totale si :*

$$\forall x, y \in E : x\mathcal{R}y \text{ ou } y\mathcal{R}x.$$

On dit aussi que $(E, \mathcal{R})$ est un ensemble totalement ordonné.

— *Si l'ordre $\mathcal{R}$ n'est pas total, on dit que $\mathcal{R}$ est un ordre partiel.*

Exemple 3.3. *on munit $\mathbb{R}^2$ de la relation notée $\mathcal{R}$ définie par :*

$$(x, y)\mathcal{R}(x', y') \Longrightarrow x \leqslant x' \text{ et } y \leqslant y'.$$

Démontrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre sur $\mathbb{R}^2$. L'ordre est il total ?

1. *$\mathcal{R}$ est réflexive :*

$$\text{Soit } (x, y) \in \mathbb{R}^2, \text{ on a } x \leqslant x \text{ et } y \leqslant y \Longrightarrow (x, y)\mathcal{R}(x, y)\ .$$

2. *$\mathcal{R}$ est antisymétrique :*

   Soient $(x, y), (x', y') \in \mathbb{R}^2$, on a $(x, y)\mathcal{R}(x', y')$ et $(x', y')\mathcal{R}(x, y)$, alors on à la fois $x \leqslant x'$ et $x' \leqslant x$ donc $x = x'$ et de même $y = y'$. Alors $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre.

3. *$<$ est transitive :*

   Soient $(x, y), (x', y'), (x'', y'') \in \mathbb{R}^2$, on a $(x, y)\mathcal{R}(x', y')$ et $(x', y')\mathcal{R}(x'', y'')$, alors on à la fois $x \leqslant x' \leqslant x''$ et $y \leqslant y' \leqslant y''$ donc $(x, y)\mathcal{R}(x'', y'')$.

   Alors $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre.

   L'ordre n'est pas total, car on ne peut pas comparer $(0, 1)$ et $(1, 0)$.