

Année Universitaire : 2021-2022

Département : S.CM.I

Module : Algèbre 1

Correction des exercices du chapitre 2

Ex1

$$\begin{aligned} 1) \quad A \cap (B \cup C) &= \{x / x \in A \wedge x \in (B \cup C)\} = \{x / x \in A \wedge (x \in B \vee x \in C)\} \\ &= \{x / (x \in A \wedge x \in B) \vee (x \in A \wedge x \in C)\} = \{x / x \in (A \cap B)\} \cup \{x / x \in (A \cap C)\} \\ &= (A \cap B) \cup (A \cap C) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) \quad \text{Soit } x \in A \cup (B \cap C) &\Leftrightarrow x \in A \vee x \in (B \cap C) \\ &\Leftrightarrow [x \in A \vee (x \in B \wedge x \in C)] \\ &\Leftrightarrow (x \in A \vee x \in B) \wedge (x \in A \vee x \in C) \\ &\Leftrightarrow x \in (A \cup B) \cap (A \cup C) \end{aligned}$$

Ex2 1)

$$\begin{aligned} a) \quad A \Delta E &= (A \cap \bar{E}) \cup (E \cap \bar{A}) = (A \cap \emptyset) \cup (\bar{A}) = \emptyset \cup \bar{A} = \bar{A} \\ b) \quad A \Delta \emptyset &= (A \cap \bar{\emptyset}) \cup (\emptyset \cap \bar{A}) = (A \cap E) \cup (\emptyset) = A \\ c) \quad A \Delta A &= (A \cap \bar{A}) \cup (A \cap \bar{A}) = \emptyset \end{aligned}$$

2) Pour que l'opérateur Δ soit commutatif, il faut que : $A \Delta B = B \Delta A$

$$A \Delta B = (A \cap \bar{B}) \cup (B \cap \bar{A}) = (B \cap \bar{A}) \cup (A \cap \bar{B}) = B \Delta A \text{ car la réunion est commutative.}$$

Ex3 1)

$$\begin{aligned} a) \quad \text{Soit } y \in f(A_1) &\Rightarrow \exists x \in A_1 \text{ tel que : } y=f(x) \\ x \in A_1 &\Rightarrow x \in A_2, \text{ car } A_1 \subset A_2 \text{ par hypothèse} \\ x \in A_2 &\Rightarrow f(x) \in f(A_2) \\ &\Rightarrow y \in f(A_2), \text{ car } y=f(x) \\ \text{Donc, on a bien : } &f(A_1) \subset f(A_2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b) \quad \text{Soit } y \in f(A_1 \cap A_2) &\Rightarrow \exists x \in (A_1 \cap A_2) \text{ tel que : } y=f(x) \\ &\Rightarrow (x \in A_1 \wedge x \in A_2) \\ &\Rightarrow [f(x) \in f(A_1) \wedge f(x) \in f(A_2)] \\ &\Rightarrow y \in f(A_1) \cap f(A_2), \text{ car } y=f(x) \\ \text{Donc, on a bien : } &f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2) \end{aligned}$$

$f(A_1) \cap f(A_2) \not\subset f(A_1 \cap A_2)$. En effet, en considérant l'application $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto f(x) = x^2$

et les sous-ensembles de \mathbb{R} suivants : $A_1 = [-1, 0]$, $A_2 = [0, 1]$, on constate que :

$A_1 \cap A_2 = \{0\}$, $f(A_1) = [0, 1]$, $f(A_2) = [0, 1]$ et $f(A_1 \cap A_2) = \{0\}$

Donc : $f(A_1) \cap f(A_2) = [0, 1] \not\subset f(A_1 \cap A_2) = \{0\}$

- c) Soit $y \in f(A_1 \cup A_2) \Leftrightarrow \exists x \in (A_1 \cup A_2)$ tel que : $y = f(x)$
 $\Leftrightarrow (x \in A_1 \vee x \in A_2)$
 $\Leftrightarrow [f(x) \in f(A_1) \vee f(x) \in f(A_2)]$
 $\Leftrightarrow [f(x) \in f(A_1) \cup f(A_2)]$
 $\Leftrightarrow y \in f(A_1) \cup f(A_2)$ car $y = f(x)$

2)

- a) Soit $x \in f^{-1}(B_1) \Rightarrow f(x) \in B_1$
 $\Rightarrow f(x) \in B_2$ car $B_1 \subset B_2$ par hypothèse
 $\Rightarrow x \in f^{-1}(B_2)$

- b) Soit $x \in f^{-1}(B_1 \cap B_2) \Leftrightarrow f(x) \in (B_1 \cap B_2)$
 $\Leftrightarrow [f(x) \in B_1 \wedge f(x) \in B_2]$
 $\Leftrightarrow [x \in f^{-1}(B_1) \wedge x \in f^{-1}(B_2)]$
 $\Leftrightarrow [x \in f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)]$

- c) Soit $x \in f^{-1}(B_1 \cup B_2) \Leftrightarrow f(x) \in (B_1 \cup B_2)$
 $\Leftrightarrow [f(x) \in B_1 \vee f(x) \in B_2]$
 $\Leftrightarrow [x \in f^{-1}(B_1) \vee x \in f^{-1}(B_2)]$
 $\Leftrightarrow [x \in f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)]$

Ex4 1)

- a) Démontrer que f est surjective équivaut à démontrer que : $\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in [-1, 1] : y = f(x)$

Démontrer que f n'est pas surjective équivaut à démontrer que : $\exists y \in \mathbb{R} : \forall x \in [-1, 1], y \neq f(x)$

On remarque que : $\forall x \in [-1, 1], f(x) \geq 0$. D'où pour $y = -3$, on a : $\forall x \in [-1, 1], -3 \neq f(x)$. Donc f n'est pas surjective.

- b) Démontrer que f est injective équivaut à démontrer que : $\forall x_1, x_2 \in [-1, 1], [f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2]$

Démontrer que f n'est pas injective équivaut à démontrer que : $\exists x_1, x_2 \in [-1, 1] : f(x_1) = f(x_2)$ et $x_1 \neq x_2$

On remarque que pour, $x_1 = -1, x_2 = 1$, on a : $f(-1) = f(1) = 0$ et $-1 \neq 1$. Donc l'application f n'est pas

injective.

c) L'application f est bijective si elle est à la fois surjective et injective.

Comme, elle n'est ni surjective, ni injective, elle n'est donc pas bijective.

2)

a) g est surjective si et seulement si : $\forall y \in [-3, +\infty[, \exists x \in \mathbb{R} : y=g(x)$. On remarque que

l'étude de la surjection conduit à la résolution de l'équation $y=g(x)$ d'inconnue x.

Soit $y \geq -3$: $g(x)=y$. Résolvons cette équation, d'inconnue x.

$$g(x)=y \Leftrightarrow x^2+4x+1 = y$$

$\Leftrightarrow x^2+4x+(1-y)=0$. Il s'agit d'une équation du second degré d'inconnue x. Résolvons là.

$$\Delta = b^2-4ac=4^2-4(1)(1-y)=16-4+4y=12+4y=4(3+y) \geq 0 \text{ car } y \geq -3.$$

Deux cas sont envisageables, $\Delta > 0$ et $\Delta = 0$

- Si $\Delta > 0$ i.e. $y+3 > 0$, l'équation a deux solutions distinctes :

$$x_1 = \frac{-4 + \sqrt{4(3+y)}}{2} = -2 + \sqrt{3+y}, \quad x_2 = \frac{-4 - \sqrt{4(3+y)}}{2} = -2 - \sqrt{3+y}$$

- Si $\Delta = 0$ i.e. $y+3=0 \Rightarrow y=-3$, l'équation a une solution double : $x_0 = \frac{-4}{2} = -2$

Dans tous les cas, on a obtenu :

$\forall y \in [-3, +\infty[, \exists x \in \mathbb{R} : y=g(x)$. L'application g est donc surjective.

b) L'application g n'est pas injective, car pour $x_1=0$ et $x_2=-4$, on a : $g(0)=g(-4)=1$ et $0 \neq -4$

c) L'application g n'est pas bijective car g n'est pas injective.

3)

a) h est surjective si et seulement si : $\forall y \in [1, +\infty[, \exists x \in [0, +\infty[: y=h(x)$

Soit $y \geq 1$; $h(x)=y$. Résolvons cette équation, d'inconnue x.

$$h(x)=y \Leftrightarrow 3x^2+4x+1 = y$$

$\Leftrightarrow 3x^2+4x+(1-y)=0$. Il s'agit d'une équation du second degré. Résolvons là.

$$\Delta = b^2-4ac=16-12(1-y)=4+12y=4(1+3y)$$

On a : $y \geq 1 \Rightarrow 3y \geq 3$

$$\Rightarrow 1+3y \geq 4$$

$\Rightarrow 4(1+3y) \geq 16 > 0$. Donc $\Delta > 0$. L'équation possède deux solutions distinctes :

$$x_1 = \frac{-4 - \sqrt{4(1+3y)}}{6} = \frac{-2 - \sqrt{1+3y}}{3}, \quad x_2 = \frac{-4 + \sqrt{4(1+3y)}}{6} = \frac{-2 + \sqrt{1+3y}}{3}$$

On remarque que : $x_1 < 0$ (refusé) et $x_2 \in [0, +\infty[$ (accepté) car pour $y \geq 1$, $1+3y \geq 4$ et

$$\sqrt{1+3y} \geq 2, \text{ ce qui donne : } \sqrt{1+3y} - 2 \geq 0$$

En résumé :

$$\forall y \in [1, +\infty[, \exists x = x_2 = \frac{-2 + \sqrt{1+3y}}{3} \in [0, +\infty[\text{ tel que : } y = h(x).$$

Donc, l'application h est surjective.

b) h est injective si et seulement si : $\forall x_1, x_2 \in [0, +\infty[; x_1 \neq x_2 \Rightarrow h(x_1) \neq h(x_2)$

$$\text{Soient } x_1, x_2 \in [0, +\infty[, x_1 \neq x_2 \Rightarrow x_1^2 \neq x_2^2$$

$$\Rightarrow 3x_1^2 \neq 3x_2^2$$

$$\Rightarrow 3x_1^2 + 4x_1 + 1 \neq 3x_2^2 + 4x_2 + 1$$

$$\Rightarrow h(x_1) \neq h(x_2)$$

Donc, l'application h est injective.

c) Comme l'application h est surjective et injective, elle est donc bijective.

Elle admet donc une application réciproque, notée h^{-1}

$h^{-1} : [1, +\infty[\rightarrow [0, +\infty[$ définie par l'équivalence suivante :

$$\forall y \in [1, +\infty[\text{ et } \forall x \in [0, +\infty[: h^{-1}(y) = x \Leftrightarrow h(x) = y$$

Donc :

$$h^{-1} : [1, +\infty[\rightarrow [0, +\infty[$$

$$y \mapsto h^{-1}(y) = \frac{-2 + \sqrt{1+3y}}{3}$$