

Année universitaire : 2021-2022

Département : S.CM.I

Module : Algèbre 1

Correction des exercices du chapitre 1 d'Algèbre 1

Ex1 La proposition vraie est notée par « 1 » et la proposition fausse par « 0 ».

1)

p	q	\bar{p}	\bar{q}	$p \vee q$	$\overline{p \vee q}$	$\bar{p} \wedge \bar{q}$	$(\overline{p \vee q}) \Leftrightarrow (\bar{p} \wedge \bar{q})$
1	1	0	0	1	0	0	1
1	0	0	1	1	0	0	1
0	1	1	0	1	0	0	1
0	0	1	1	0	1	1	1

2)

p	q	\bar{p}	\bar{q}	$p \wedge q$	$\overline{p \wedge q}$	$\bar{p} \vee \bar{q}$	$(\overline{p \wedge q}) \Leftrightarrow (\bar{p} \vee \bar{q})$
1	1	0	0	1	0	0	1
1	0	0	1	0	1	1	1
0	1	1	0	0	1	1	1
0	0	1	1	0	1	1	1

3)

p	q	r	$p \wedge q$	$(p \wedge q) \Rightarrow r$	$p \Rightarrow r$	$q \Rightarrow r$	$(p \Rightarrow r) \vee (q \Rightarrow r)$	$(p \wedge q) \Rightarrow r \Leftrightarrow (p \Rightarrow r) \vee (q \Rightarrow r)$
1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	0	0	0	0	1
1	0	1	0	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0	1	1	1
0	1	1	0	1	1	1	1	1
0	1	0	0	1	1	0	1	1
0	0	1	0	1	1	1	1	1
0	0	0	0	1	1	1	1	1

4)

p	q	r	$q \vee r$	$p \wedge (q \vee r)$	$p \wedge q$	$p \wedge r$	$(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	$p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1	0	1	1
1	0	1	1	1	0	1	1	1
1	0	0	0	0	0	0	0	1
0	1	1	1	0	0	0	0	1
0	1	0	1	0	0	0	0	1
0	0	1	1	0	0	0	0	1
0	0	0	0	0	0	0	0	1

5)

p	q	r	$q \vee r$	$p \Rightarrow (q \vee r)$	$p \Rightarrow q$	$p \Rightarrow r$	$(p \Rightarrow q) \vee (p \Rightarrow r)$	$p \Rightarrow (q \vee r) \Leftrightarrow (p \Rightarrow q) \vee (p \Rightarrow r)$
1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1	0	1	1
1	0	1	1	1	0	1	1	1
1	0	0	0	0	0	0	0	1
0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	1	1	1	1	1	1
0	0	1	1	1	1	1	1	1
0	0	0	0	1	1	1	1	1

Ex2 1)

- La proposition a) est fausse car la proposition « 248 est multiple de 6 » est fausse, puisque 248 n'est pas un multiple de 6.
- La proposition b) est vraie car la proposition « 3 divise 48 » est vraie.
- La proposition c) est vraie.
- La proposition d) est vraie car y est fourni après chaque x. Il dépend de x et peut donc varier quand x varie. Pour un x donné, on peut prendre par exemple $y=x+1$ de sorte que :
 $y-x-(x+1)=-1<0$
- La proposition e) est fausse car x est fourni une fois pour toutes avant les y, et est donc constant quand y varie. Par exemple, pour $x=1$, on a : $1<y$. De ce fait, $\forall y \in \mathbb{R}, y>1$ est fausse.
- La proposition f) est fausse. Par exemple, pour $x=-4, y=-6$; on a : $x-y=-4+6=2>0$
- La proposition g) est vraie. Par exemple, pour $x=-2, y=1$; on a : $x-y=-2-1=-3<0$

2)

- La négation de a) est : 248 n'est pas un multiple de 6 ou 3 ne divise pas 48.
- La négation de b) est : 248 n'est pas un multiple de 6 et 3 ne divise pas 48.
- La négation de c) est : $(\forall x \in \mathbb{R}, x+5 \neq 0)$ et $(\forall x \in \mathbb{R}, x+9 \neq 0)$
- La négation de d) est : $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R} ; x-y \geq 0$
- La négation de e) est : $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R} ; x-y \geq 0$
- La négation de f) est : $\exists x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R} ; x-y \geq 0$
- La négation de g) est : $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R} ; x-y \geq 0$

Ex3 La formulation mathématique des expressions données est la suivante :

- 1) $\exists c \in \mathbb{R} / \forall x \in \mathbb{R}, f(x)=c$
- 2) $\forall c \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}, f(x) \neq c$
- 3) $\exists x \in \mathbb{R}, f(x)=0$
- 4) $\exists M \in \mathbb{R}, \exists m \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, m \leq f(x) \leq M$
- 5) $\forall x \in \mathbb{R}, \exists T \in \mathbb{R}^* / f(x+T)=f(x)$
- 6) $\forall n \in \mathbb{N}, \exists x \in \mathbb{R} / f(x)=n$

Ex4

1) ($a \in \mathbb{Q} \Rightarrow a = p/q$; $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{Z}^*$) et ($b \in \mathbb{Q} \Rightarrow b = p_1/q_1$; $p_1 \in \mathbb{Z}$, $q_1 \in \mathbb{Z}^*$)

D'où : $a+b = (p/q) + (p_1/q_1) = (p q_1 + q p_1) / q q_1 = p_2/q_2$ avec $p_2 = (p q_1 + q p_1) \in \mathbb{Z}$ et $q_2 = q q_1 \in \mathbb{Z}^*$

Donc : $(a+b) \in \mathbb{Q}$

2) Le raisonnement par contraposée dit que, démontrer (n^2 pair $\Rightarrow n$ pair) équivaut à démontrer que (n impair $\Rightarrow n^2$ impair).

n impair $\Rightarrow n = 2k+1$, $k \in \mathbb{N}$

$$\Rightarrow n^2 = (2k+1)^2$$

$$\Rightarrow n^2 = 4k^2 + 4k + 1$$

$$\Rightarrow n^2 = 2(2k^2 + 2k) + 1$$

$$\Rightarrow n^2 = 2k_1 + 1, \text{ avec } k_1 = (2k^2 + 2k) \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow n^2 \text{ impair}$$

Donc, la proposition initiale (n^2 pair $\Rightarrow n$ pair) est vraie.

3) Raisonnons par l'absurde.

Supposons que la proposition est fautive, donc, on a : $(\frac{a}{1+b} = \frac{b}{1+a})$

et $a \neq b$.

$$(\frac{a}{1+b} = \frac{b}{1+a}) \Rightarrow (a+a^2 = b+b^2)$$

$$\Rightarrow (a-b)(a+b) = -(a-b)$$

$$\Rightarrow a+b = -1, \text{ car } a \neq b.$$

Or, par hypothèse, on a : $a, b \geq 0$. D'où $a+b$ ne peut pas être négative. D'où la contradiction.

4) Soit P_n la proposition donnée.

Raisonnons par récurrence.

Pour $n=0$, P_0 est vraie car on a : $0=0$.

Supposons que P_n est vraie et montrons que P_{n+1} est aussi vraie, i.e. que

$$\sum_{k=0}^{n+1} k^3 = \frac{(n+1)^2}{4} (n+2)^2$$

$$\sum_{k=0}^{n+1} k^3 = \sum_{k=0}^n k^3 + (n+1)^3 = \frac{n^2}{4} (n+1)^2 + (n+1)^3 = \frac{(n+1)^2}{4} (n+2)^2$$

Donc P_n est vraie $\forall n \in \mathbb{N}$.