Année Universitaire : 2021-2022

Département : S.C.M.I

Module : Algèbre 1

Correction des exercices du chapitre 3

Ex1 1) $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence si elle est réflexive, symétrique et transitive.

a) $\mathcal{R}$ est réflexive si : $\forall x \in \mathbb{Z}, x \mathcal{R} x$
Soit $x \in \mathbb{Z}$. Or : $x-x = 0 = 3.0 \Leftrightarrow x \mathcal{R} x$. Donc, $\mathcal{R}$ est bien réflexive.

b) $\mathcal{R}$ est symétrique si : $\forall x, y \in \mathbb{Z}, x \mathcal{R} y \Rightarrow y \mathcal{R} x$

Soient $x, y \in \mathbb{Z}$: $x \mathcal{R} y \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : x-y = 3k$

$x-y=3k \Rightarrow y-x = 3(-k) = 3k'$, avec $k' = (-k) \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow y \mathcal{R} x$. Donc, $\mathcal{R}$ est bien symétrique.

c) $\mathcal{R}$ est transitive si : $\forall x, y, z \in \mathbb{Z}, (x \mathcal{R} y \text{ et } y \mathcal{R} z) \Rightarrow x \mathcal{R} z$

Soient $x, y, z \in \mathbb{Z}$: $x \mathcal{R} y \Leftrightarrow \exists k_1 \in \mathbb{Z} : x-y = 3k_1$ (1)

et $y \mathcal{R} z \Leftrightarrow \exists k_2 \in \mathbb{Z} : y-z = 3k_2$ (2)

(1)+(2) $\Rightarrow x-z = 3(k_1+k_2) = 3k_3$ où $k_3 = (k_1+k_2) \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow x \mathcal{R} z$. Donc, $\mathcal{R}$ est bien transitive

De a), b) et c), on déduit que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur $\mathbb{Z}$.

2) Soit $x \in \mathbb{Z}$. La classe d'équivalence de x est notée par C(x) et est définie par :

$C(x) = \{y \in \mathbb{Z} / x \mathcal{R} y\} = \{y \in \mathbb{Z} / x-y = 3k\} = \{x-3k : k \in \mathbb{Z}\} = \{\dots, x-6, x-3, x-0, x+3, x+6, \dots\}$. D'où :

$C(0) = \{\dots, -6, -3, 0, 3, 6, \dots\}$, $C(1) = \{\dots, -5, -2, 1, 4, 7, \dots\}$ et $C(2) = \{\dots, -4, -1, 2, 5, 8, \dots\}$

3) $\mathbb{Z}/\mathcal{R} = \{C(x) : x \in \mathbb{Z}\} = \{C(0), C(1), C(2)\}$

Ex2 $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence si elle est réflexive, symétrique et transitive.

- $\mathcal{R}$ est réflexive par hypothèse.

- $\mathcal{R}$ est symétrique si : $\forall x, y \in E, x \mathcal{R} y \Rightarrow y \mathcal{R} x$
Soient $x, y \in E$, on a : $[x \mathcal{R} y$ et $y \mathcal{R} y$ (car $\mathcal{R}$ est réflexive par hypothèse)$] \Rightarrow (y \mathcal{R} x)$ d'après la définition de la relation $\mathcal{R}$ sur E. Donc, $\mathcal{R}$ est symétrique.

- $\mathcal{R}$ est transitive si : $\forall x, y, z \in E, (x \mathcal{R} y \text{ et } y \mathcal{R} z) \Rightarrow x \mathcal{R} z$

Soient x, y, z ∈ E, ($x \mathcal{R} y$ et $y \mathcal{R} z$) $\Rightarrow z \mathcal{R} x$, d'après la définition de la relation $\mathcal{R}$ sur E.

$\Rightarrow x \mathcal{R} z$ car $\mathcal{R}$ est symétrique. Donc, $\mathcal{R}$ est transitive.

Ainsi $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur l'ensemble E.

Ex3 1) $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre sur $\mathbb{N}^*$ si elle est réflexive, antisymétrique et transitive.

- $\mathcal{R}$ est réflexive si : $\forall a \in \mathbb{N}^*, a \mathcal{R} a$

  Soit $a \in \mathbb{N}^*$. Or : $a=a.1 \Leftrightarrow a \mathcal{R} a$. Donc, $\mathcal{R}$ est bien réflexive.
- $\mathcal{R}$ est antisymétrique si : $\forall a, b \in \mathbb{N}^*$, ($a \mathcal{R} b$ et $b \mathcal{R} a$) $\Rightarrow a=b$

  Soient $a, b \in \mathbb{N}^*$, $a \mathcal{R} b \Leftrightarrow \exists q \in \mathbb{N}^* : b=a.q$ et $b \mathcal{R} a \Leftrightarrow \exists q' \in \mathbb{N}^* : a=b.q'$

  On a: $b.a= (a.q). (b.q')= (b.a). (q.q') \Rightarrow (q.q')=1$

  $\Rightarrow q=q'=1$ car ce sont des entiers naturels non nuls.

  D'où : a=b. Donc, $\mathcal{R}$ est bien antisymétrique.
- $\mathcal{R}$ est transitive si : $\forall a, b, c \in \mathbb{N}^*$, ($a \mathcal{R} b$ et $b \mathcal{R} c$) $\Rightarrow a \mathcal{R} c$

  Soient $a, b, c \in \mathbb{N}^*$, $a \mathcal{R} b \Leftrightarrow \exists q \in \mathbb{N}^* : b=a.q$ et $b \mathcal{R} c \Leftrightarrow \exists q_1 \in \mathbb{N}^* : c=b.q_1$

  D'où : $c= (a.q). q_1=a. (q. q_1)=a.q_2 \Rightarrow a \mathcal{R} c$ où $q_2= (q.q_1) \in \mathbb{N}^*$. Donc, $\mathcal{R}$ est bien transitive.

  La relation $\mathcal{R}$ est bien une relation d'ordre sur $\mathbb{N}^*$.

2) La relation $\mathcal{R}$ est d'ordre total si : $\forall a, b \in \mathbb{N}^*$, $a \mathcal{R} b$ ou $b \mathcal{R} a$.

Or, on constate que 2 n'est pas en relation avec 3 et 3 n'est pas en relation avec 2. Donc la relation $\mathcal{R}$ n'est pas d'ordre total. Elle est d'ordre partiel.

Ex3 1) $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre sur P(E) si elle est réflexive, antisymétrique et transitive.

a) $\mathcal{R}$ est réflexive si : $\forall A \in P(E)$, $A \mathcal{R} A$

   Soit $A \in P(E)$. On a : $A \mathcal{R} A$ car $A \subset A$. Donc, $\mathcal{R}$ est bien réflexive.

b) $\mathcal{R}$ est antisymétrique si : $\forall A, B \in P(E)$, ($A \mathcal{R} B$ et $B \mathcal{R} A$) $\Rightarrow A=B$

   Soient $A, B \in P(E)$, $A \mathcal{R} B \Leftrightarrow A \subset B$ et $B \mathcal{R} A \Leftrightarrow B \subset A$

   ($A \subset B$ et $B \subset A$) $\Rightarrow A=B$. Donc, $\mathcal{R}$ est bien antisymétrique.

c) $\mathcal{R}$ est transitive si : $\forall A, B, C \in P(E)$, ($A \mathcal{R} B$ et $B \mathcal{R} C$) $\Rightarrow A \mathcal{R} C$

   Soient $A, B, C \in P(E)$, $A \mathcal{R} B \Leftrightarrow A \subset B$ et $B \mathcal{R} C \Leftrightarrow B \subset C$

   ($A \subset B$ et $B \subset C$) $\Rightarrow A \subset C$

   $\Rightarrow A \mathcal{R} C$. Donc, $\mathcal{R}$ est bien transitive.

   De a), b) et c) on déduit que $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre sur l'ensemble P(E).

2) L'ordre est total si : $\forall A, B \in P(E)$, $A \mathcal{R} B$ ou $B \mathcal{R} A$

   L'ordre n'est pas total. Il est donc partiel. En effet, si on prend par exemple E= {1,2}, on aura :

   $P(E)= \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, E\}$ et $\{1\} \not\subset \{2\}$ et $\{2\} \not\subset \{1\}$