Faculté MI **Durée: 1H30**
Univ-Batna2
1ère année MI (**2017/2018**)

Contrôle final
Analyse2

Exercice1

1) Calculer la dérivée d'ordre n de la fonction: $x^3 \ln(1+x)$. $(4pts)$

2) Donner le DL à l'ordre 3 au point 0 de:

$i)$ $f(x) = \ln(1+x)$ $(1pts)$ $ii)$ $g(x) = \dfrac{1}{1-x}$ $(1pts)$

$iii)$ $h(x) = \dfrac{\ln(1+x)}{1-x}$ $(1pts)$

3) Calculer $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1+x) - x}{x^2}$ $(1pts)$

Exercice2

1) Déterminer les extremums locaux de la fonction
$g(x) = x^4 - 2x^2 + 1$ $(3pts)$

2) La fonction $h(x) = \sqrt{x^2}$ admet-elle un extremum local au point 0 ? $(1pts)$

Exercice3

1) Calculer $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin 2x)\, e^x dx$ $(3pts)$

2) Montrer que: $\forall x \in \mathbb{R}$, $\cos^2 x = \dfrac{1 + \cos 2x}{2}$ $(1pts)$

2) Déduire que: $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^2 x)\, e^x dx = -1 + I$ $(1pts)$

3) $a)$ Déterminer a et b tel que: $\dfrac{1}{x^2+3x+2} = \dfrac{a}{x+1} + \dfrac{b}{x+2}$ $(1pts)$

$b)$ Calculer $\displaystyle\int_0^1 \left(\frac{1}{x^2+3x+2}\right) dx$ $(2pts)$

Bon courage

Remarque: Les questions**:** [**Exercice1**, 2), **Exercice2** 1)] sont considérées comme intérrogation1 pour les étudiants (Absence justifiée).

Correction

Exercice1

1) Soient $f(x) = \ln(1+x)$ et $g(x) = x^3$. Puisque $g^{(1)}(x) = 3x^2$, $g^{(2)}(x) = 6x$ et $g^{(3)}(x) = 6$, donc $g^{(n)}(x) = 0$ $\forall n \geq 4$ $(1pt)$ et la formule de Leibniz s'écrit $\sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k g^{(k)}(x) f^{(n-k)}(x)$. Comme $f^{(1)}(x) = \dfrac{1}{1+x}$, $f^{(2)}(x) = \dfrac{-1}{(1+x)^2}$, $f^{(3)}(x) = \dfrac{2}{(1+x)^3}$ donc $f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1} \dfrac{(n-1)!}{(1+x)^n}$ $(1pt)$ alors: $\sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k g^{(k)}(x) f^{(n-k)}(x) = C_n^0 g^{(0)}(x) f^{(n)}(x) + C_n^1 g^{(1)}(x) f^{(n-1)}(x) + C_n^2 g^{(2)}(x) f^{(n-2)}(x) + C_n^3 g^{(3)}(x) f^{(n-3)}(x) =$

$= (-1)^{n-1} \dfrac{(n-1)!}{(1+x)^n} x^3 + n(-1)^{n-2} \dfrac{(n-2)!}{(1+x)^{n-1}} 3x^2 + n(n-1)(-1)^{n-3} \dfrac{(n-3)!}{(1+x)^{n-2}} 3x + n(n-1)(n-2)(-1)^{n-4} \dfrac{(n-4)!}{(1+x)^{n-3}} =$

$= -(-1)^n \dfrac{(n-1)!}{(1+x)^n} x^3 + n(-1)^n \dfrac{(n-2)!}{(1+x)^{n-1}} 3x^2 - n(n-1)(-1)^n \dfrac{(n-3)!}{(1+x)^{n-2}} 3x + n(n-1)(n-2)(-1)^n \dfrac{(n-4)!}{(1+x)^{n-3}}$ $(2pts)$.

2) Le DL à l'ordre 3 au point 0 de: $i)$ $f(x) = \ln(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} + x^3\alpha(x)$ $(1pt)$, $ii)$ $g(x) = \dfrac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^3\beta(x)$ $(1pt)$ où $\alpha(x)$ et $\beta(x \to 0$ quand $x \to 0$. Alors $iii)$ $f(x) = \dfrac{\ln(1+x)}{1-x} = \left(x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} + x^3\alpha(x)\right)(1 + x + x^2 + x^3 + x^3\beta(x)) = x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{5x^3}{6} + x^3\epsilon(x)$ $(1pt)$ où $\epsilon(x)$ est une fonction de $\alpha(x)$ et $\beta(x$ et $\to 0$ quand $x \to 0$.

3) Puisque $\ln(1+x) - x = -\dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} + x^3\alpha(x)$ alors $\dfrac{\ln(1+x) - x}{x^2} = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{x}{3} + x^3\alpha(x)$, donc $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1+x) - x}{x^2} = -\dfrac{1}{2}$ $(1pts)$

Exercice2

1) $g(x) = x^4 - 2x^2 + 1$ donc $g'(x) = 4x(x^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow$

$(x_0 = 0,$ ou $x_1 = 1,$ ou $x_2 = -1)$ $(1pts)$. Comme $g''(x) = 4(3x^2 - 1)$ alors: $g''(0) = -4$ donc $x_0 = 0$ est maximum local de $g(x)$ $(1pts)$ et $g''(\pm 1) = 8$ donc $x_1 = 1$, et $x_2 = -1$ sont deux minimums locaux de $g(x)$ $(1pts)$

2) La fonction $h(x) = \sqrt{x^2} = |x|$ n'est pas dérivable en 0, car $\lim_{x \to 0} \frac{|x|}{x} = \pm 1$ $(0.5pt)$. Comme $h'(x) = 1$, si $x > 0$ et $h'(x) = -1$ si $x < 0$. alors 0 est un minimum local de $h(x)$.$(0,5pts)$

Exercice3

1) $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin 2x)\, e^x dx = [(\sin 2x)\, e^x]_0^{\frac{\pi}{2}} - 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos 2x)\, e^x dx$

$= -2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos 2x)\, e^x dx = -2\left\{ [(\cos 2x)\, e^x]_0^{\frac{\pi}{2}} + 2I \right\} = -2\left(-e^{\frac{\pi}{2}} - 1 + 2I\right).$

$(2pts)$

Donc $5I = 2(e^{\frac{\pi}{2}} + 1)$ ou $I = \frac{2}{5}(e^{\frac{\pi}{2}} + 1)$ $(1pts)$

2) $\forall x \in \mathbb{R}$, $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = \cos^2 x - (1 - \cos^2 x) = 2\cos^2 x - 1$ d'où: $\cos^2 x = \dfrac{1 + \cos 2x}{2}$ $(1pts)$

3) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^2 x)\, e^x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right) e^x dx = \left[\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right) e^x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin 2x)\, e^x dx$

$$= -1 + \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin 2x)\, e^x dx = -1 + I, \ (1pts) \text{ où}$$

3) $a)$ On a:
$$\frac{1}{x^2+3x+2} = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x+2} = \frac{1}{(x+1)(x+2)} = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2}$$

$(a = 1$ et $b = -1)$ $(1pts)$

$b)$
$$\int_0^1 \left(\frac{1}{x^2+3x+2}\right) dx = \int_0^1 \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2}\right) dx$$
$$= [\ln(x+1) - \ln(x+2)]_0^1$$
$$= \left[\ln \frac{x+1}{x+2}\right]_0^1 = \ln\frac{2}{3} - \ln\frac{1}{2}$$
$$= \ln\frac{4}{3} = 2\ln 2 - \ln 3. \ (2pts)$$

Faculté MI **Durée: 1H30**
Univ-Batna2
1ère année MI (2017/2018)

Intérogation2
Analyse2

Exercice1.
1) Montrer que: $\forall x \in \mathbb{R}, \sin^2 x = \dfrac{1-\cos 2x}{2}$ $(1pts)$

2) Calculer $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^2 x dx$ $(2pts)$

Exercice2. Réoudre l'équation différentielle suivante:
$y' = y + xe^x$ $(3pts)$

Faculté MI **Durée: 1H30**
Univ-Batna2
1ère année MI (2017/2018)

Intérogation2
Analyse2

Exercice1.
1) Montrer que: $\forall x \in \mathbb{R}, \sin^2 x = \dfrac{1-\cos 2x}{2}$ $(1pts)$

2) Calculer $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^2 x dx$ $(2pts)$

Exercice2. Réoudre l'équation différentielle suivante:
$y' = y + xe^x$ $(3pts)$

Correction
Intérogation2

Exercice1.

1) Puisque $\forall x \in \mathbb{R}$, $\cos^2 x = \dfrac{1+\cos 2x}{2}$, et $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$, donc

$$\sin^2 x = 1 - \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right) = \frac{1-\cos 2x}{2} \qquad (1pts)$$

2) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^2 x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right) dx = \left[\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}$ $(2pts)$

Exercice2. Soit $y' = y + xe^x$ (E). L'équation homogène associée à (E) est:

$y' = y$ (E_0) qui a pour solution: $y = ke^x$, où k est une constante de $\mathbb{R}$. $(1pts)$

Reste à trouver une solution particulière de (E) sous la forme $y_p = k(x)e^x$ $(0.5pt)$. Alors $y_p' = y_p + k'(x)e^x$, donc $k'(x) = x$, d'où $k(x) = \dfrac{1}{2}x^2$ $(1pts)$.

La solution générale de (E) est donc $y_g = y_p + y = \left(k + \dfrac{1}{2}x^2\right) e^x$ $(0.5pt)$.