Probabilités et statistique

Corrigé de l'examen

Exercice 1 *(6pts)*

1. *L'équation de la droite de régression.* ***(4.5 pts)***

   Soit le tableau récapitulatif suivant :

	v_i	d_i	v_i^2	d_i^2	v_id_i
	40	*8*	*1600*	*64*	*320*
	50	*12*	*2500*	*144*	*600*
	60	*18*	*3600*	*324*	*1080*
	72	*24*	*4900*	*576*	*1680*
	80	*32*	*6400*	*1024*	*2560*
	90	*40*	*8100*	*1600*	*3600*
	100	*48*	*10000*	*2304*	*4800*
	110	*58*	*12100*	*3364*	*6380*
	120	*72*	*14400*	*5184*	*8640*
total	*720*	*312*	*63600*	*14584*	*29660*
moyenne	*80*	*34.66*	*7066.66*	*1620.44*	*3295.55*

   L'équation de la droite de régression de la distance de freinage en fonction de la vitesse est :

   $D = aV + b$ ***(0.5 pt)*** *où*

   $$\begin{cases} a = \dfrac{Cov(V, D)}{Var(V)}, \\ b = \overline{D} - a\overline{V}. \end{cases} \quad \textbf{\textit{(0.5 pt)}}$$

   On a $\overline{V} = 80$ ***(0.5 pt)***, $\overline{D} = 34.66$, ***(0.5 pt)***

   $Var(V) = \overline{V^2} - \overline{V}^2 = 7066.66 - (80)^2 = 666.67$, ***(0.5 pt)***

   $Var(D) = \overline{D^2} - \overline{D}^2 = 1620.44 - (34.66)^2 = 419.12$ ***(0.5 pt)***

   $Cov(V, D) = \overline{VD} - \overline{V} \times \overline{D} = 3295.55 - 80 \times 34.66 = 522.75$ ***(0.5 pt)***

   D'où

   $$a = \frac{522.75}{666.67} = 0.784 \quad \textbf{\textit{(0.25 pt)}}$$

   et

   $$b = 34.66 - (0.78 * 80) = -28.06 \quad \textbf{\textit{(0.25 pt)}}$$

   Enfin, l'équation est :

   $$\boxed{D = 0.784V - 28.06} \quad \textbf{\textit{(0.5 pt)}}$$

2. *Le coefficient de corrélation*

   $$r = \frac{Cov(D, V)}{\sigma_D.\sigma_V} \quad \textbf{\textit{(0.25 pt)}}$$

   $$\sigma_V = \sqrt{Var(V)} = \sqrt{666.67} = 25.82 \quad \textbf{\textit{(0.25 pt)}}$$

$$\sigma_D = \sqrt{Var(D)} = \sqrt{419.12} = 20.47 \quad \textbf{\textit{(0.25 pt)}}$$

Alors $r = \dfrac{522.75}{20.47 \times 25.81} = 0.989$ ***(0.25 pt)*** *Il y a une forte relation linéaire entre la distance de freinage et la vitesse.*

3. *Pour la vitesse de* $130km/h$ *on estime une distance de freinage égale à*

$$D = 0.78 * 130 - 28.06 = 73.86m \quad \textbf{\textit{(0.5 pt)}}$$

Exercice 2 ***1ère partie :****une liste de 5 éléments pris parmi 10 :* $n^p = 10^5$ *possibilités.* ***(0.5 pts)***

2ème partie :*Le premier chiffre est le 1, les deux autres sont 1 et 7, tous les chiffres sont fixés :*$1 \times 1 \times 1$ *possibilités.* ***(0.5 pts)***

3ème partie :*Le premier chiffre à gauche peut prendre l'un des chiffres* $\{0, 1, 2, 3, 4\}$, *le deuxième chiffre prendra l'un des chiffres* $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ *:* 5×10 *possibilités -2 possibilités pour les wilayas (00 et 49) donc 48 possibilités.* ***(0.5 pts)***

Enfin, on peut former : $10^5 \times 1 \times 1 \times 1 \times 48 = 4800000$ *plaques différentes.****(0.5 pts)***

Exercice 3 ***(3 pts)*** *On jette simultanément une pièce de monnaie et un dé*

$$\Omega = \{P, F\} \times \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, \quad Card(\Omega) = 12. \quad \textbf{\textit{(0.25 pt)}}$$

1. $\overline{A}$ *:"obtenir une face"* ***(0.25 pt)*** $\overline{B}$ *:"obtenir un nombre* ≥ 3." ***(0.25 pt)***
2. $A = \{(P, 1); (P, 2); (P, 3); (P, 4); (P, 5); (P, 6)\}$ ***(0.25 pt)***
   $B = \{(P, 1); (P, 2); (F, 1); (F, 2)\}$ ***(0.25 pt)***
   $A \cap B = \{(P, 1); (P, 2)\}$ ***(0.25 pt)***
3. $p(A) = \frac{6}{12} = 1/2;$ ***(0.25 pt)***
   $p(B) = \dfrac{2}{12} = 1/6;$ ***(0.25 pt)***
   $p(A \cap B) = \dfrac{2}{12} = 1/6.$ ***(0.25 pt)***
4. *On remarque que :* $p(A \cap B) = \dfrac{1}{6} \neq \dfrac{1}{2} * \dfrac{1}{6} = p(A)p(B)$. *D'où A et B ne sont pas indépendants.* ***(0.25 pt)***
5. *On ne peut rien conclure à propos de l'indépendance de* $\overline{A}$ *et* $\overline{B}$. ***(0.5 pt)***

Exercice 4 ***Cas 1 :*** ***(1.5 pts)***

A et B sont incompatibles donc $p(A \cap B) = 0$ ***(0.5 pt)***

$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) = 1/3$ ***(0.5 pt)***

$p(A) + p(B) = 1/3$ *donc* $p(B) = 1/3 - p(A) = 1/3 - 1/4 = 1/12.$ ***(0.5 pt)***

Cas 2 : ***(1.5 pts)***

Si A et B sont indépendants alors A et $\overline{B}$ *sont indépendants aussi,* *donc* $p(A \cap \overline{B}) = p(A)p(\overline{B})$ ***(0.5 pt)***

$p(A) = 0.34 \Rightarrow p(\overline{A}) = 1 - p(A) = 1 - 0.34 = 0.66$

$p(B) = 0.56 \Rightarrow p(\overline{B}) = 1 - p(B) = 1 - 0.56 = 0.44$

$p(A \cup \overline{B}) = p(A) + p(\overline{B}) - p(A \cap \overline{B}) = p(A) + p(\overline{B})p(\overline{A})$ ***(0.5 pt)***

Donc $p(A \cup \overline{B}) = 0.34 + 0.66 * 0.44 = 0.63$ ***(0.5 pt)***

Exercice 5 *La définition des événements sur* ***(0.5 pt)***

S_i *:" le tirage se fait du sac i"* $(i = 1, 2, 3)$

R *: "tirer un jeton rouge"*

1. ***(2 pts)*** $p(R) =?$ *D'après la formule des probabilités totales, on a :*

$$p(R) = \Sigma_{i=1}^{3} p(R/S_i)p(S_i) = p(R/S_1)p(S_1) + p(R/S_2)p(S_2) + p(R/S_3)p(S_3). \quad \textit{\textbf{(0.25 pt)}}$$

Pour l'expérience du lancé des trois pièces

$$\Omega = \{(PPF), (PFF), (PPP), (FPP), (FFP), (FFF), (FPF), (PFP)\}$$

$p(S_1) = 3/8 = 0.375$ ***(0.25 pt)*** $p(S_2) = 2/8 = 0.25$ ***(0.25 pt)*** $p(S_3) = 3/8 = 0.375$ ***(0.25 pt)***

$p(R/S_1) = 4/8 = 0.5$ ***(0.25 pt)***

$p(R/S_2) = 4/10 = 0.4$ ***(0.25 pt)***

$p(R/S_3) = 8/12 = 0.67$ ***(0.25 pt)***

$p(R) = (0.5 \times 0.375) + (0.25 \times 0.4) + (0.375 \times 0.67) = 0.5387$ ***(0.25 pt)***

2. ***(2 pts)*** $p(S_1/R) =?$ *D'après la formule de Bayes, on a :*

$$p(S_1/R) = \frac{p(R/S_1)p(S_1)}{p(R/S_1)p(S_1) + p(R/S_2)p(S_2) + p(R/S_3)p(S_3)} \quad \textit{\textbf{(1 pt)}}$$

$$p(S_1/R) = \frac{0.5 \times 0.375}{0.5 \times 0.375 + 0.25 \times 0.4 + 0.375 \times 0.67} = 0.3481 \quad \textit{\textbf{(1 pt)}}$$

3. ***(1.5 pt)*** B *:"les deux boules tirées sont bleus"* ***(0.25 pt)***

$$p(B) = \frac{Card(B)}{Card(B)} = \frac{C_{14}^2 \times C_{16}^0}{C_{30}^2} = 0.20 \quad \textit{\textbf{(1.25 pt)}}$$