UNIVERSITÉ MOSTEFA BEN BOULAID- BATNA 2
FACULTÉ DE MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUE
DÉPARTEMENT DU SOCLE COMMUN MI

MODULE: ANALYSE 1.
SEMESTRE 2.
ANNÉE UNIVERSITAIRE: 2019-2020.

Corrigé type de la Série 1 (les intégrales indéfinies, calcul intégral)

Réalisé par : Mme K. Belkacem, Mme E. Merzougui et Mme A. Touil

Table des matières

1 Préliminaires

Primitives, intégrales indéfinies

L'intégrale indéfinie est le problème inverse de la recherche de la dérivée d'une fonction donnée.

Définition 1.1. *Soient $I \subset \mathbb{R}$ et $f : I \longmapsto \mathbb{R}$ une fonction réelle définie sur I. On appelle **primitive** de f sur I toute fonction définie et **dérivable** sur I vérifiant :*

$$F'(x) = f(x) \; \forall x \in I$$

Définition 1.2. *On appelle **intégrale indéfinie** de la fonction $f : I \longmapsto \mathbb{R}$ sur I qu'on note par : $\int f(x)dx$, $x \in I$ l'ensemble des primitives de f sur I, si elles existent.*
Si F est une primitive de f, alors on écrit :

$$\int f(x)dx = F(x) + C, C \in \mathbb{R}$$

Théorème 1.1. ***(Existence de l'intégrale indéfinie)***
Toute fonction continue sur un intervalle admet une primitive sur cet intervalle

Tables des dérivées de certaines fonctions usuelles et élémentaires

Fonction	**Dérivée**
$(x^\alpha)', \alpha \in \mathbb{R}$	$\alpha x^{\alpha-1}$
$(\exp x)', x \in \mathbb{R}$	$\exp x$
$(\ln\lvert x\rvert)', x \neq 0$	$\frac{1}{x}$
$(\sin x)' x \in \mathbb{R}$	$\cos x$
$(\cos x)' x \in \mathbb{R}$	$-\sin x$
$(\tan x)', x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k; k \in \mathbb{Z}$	$\frac{1}{\cos x^2}$
$(\arcsin x)'$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \lvert x\rvert < 1$
$(\arccos x)'$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \lvert x\rvert < 1$
$(\arctan U)'$	$\frac{U'}{1+U^2}$

Propriétés des fonctions trigonométriques (formule d'addition, duplication...)

Pour tout réel x, on a :

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$

$$\cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$$

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$$

$$\sin(x-y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x$$

$$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}, \sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$$

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$$

Table des primitives des fonctions élémentaires

Fonction	Une Primitive
0	$C, C \in \mathbb{R}$
λ (constante réelle)	$\lambda x + C$
x^α	$\dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, (\alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq -1)$
a^x	$\dfrac{a^x}{\ln a} + C, (a > 0, a \neq 1)$ et $x \in \mathbb{R}$
$\dfrac{1}{x}$	$\ln\|x\| + C, x \neq 0$
$\dfrac{f'(x)}{f(x)}$	$\ln\|f(x)\| + C$
$\exp x$	$\exp x + C$
$f'(x)\exp(f(x))$	$\exp(f(x)) + C$
$\sin x$	$-\cos x + C, (x \in \mathbb{R})$
$f'(x)\sin(f(x))$	$-\cos(f(x))$
$\cos x$	$\sin x + C, (x \in \mathbb{R})$
$f'(x)\cos(f(x))$	$\sin(f(x)) + C$
$\dfrac{1}{\cos^2 x}$	$\tan x + C, (x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z})$
$\dfrac{1}{1+x^2}$	$\arctan x + C$
$\dfrac{1}{a+x^2}$	$\dfrac{1}{\sqrt{a}} \arctan \dfrac{x}{\sqrt{a}} + C$
$f'(x)f^n(x); n \in \mathbb{N}^*$	$\dfrac{f^{n+1}(x)}{n+1} + C$
$\dfrac{f'(x)}{f^n(x)};\ n \geq 2$	$-\dfrac{1}{(n-1)f^{n-1}(x)} + C$

1.1 Solution de l'exercice 1

Partie I :

1. Montrons que : $\displaystyle\int \sqrt[n]{x^m}dx = \frac{n}{m+n}x^{\frac{m+n}{n}} + C$

   On pose $f_1(x) = \sqrt[n]{x^m}$ et $F_1(x) = \dfrac{n}{m+n}x^{\frac{m+n}{n}}$.
   Remarquons que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} F_1'(x) &= \left(\frac{n}{m+n}x^{\frac{m+n}{n}}\right)' \\ &= \frac{n}{m+n} \times \frac{m+n}{n} x^{\frac{m+n}{n}-1} \\ &= x^{\frac{m+n-n}{n}} \\ &= x^{\frac{m}{n}} \\ &= (x^m)^{\frac{1}{n}} \\ &= \sqrt[n]{x^m} = f_1(x). \end{aligned}$$

   Alors, d'après la définition (1.1) de la fonction primitive, on déduit que F_1 est une **primitive** de f_1. Ainsi, suivant la définition (1.2) de l'intégrale indéfinie, on obtient :

$$\int f_1(x)dx = F_1(x) + C.$$

2. Montrons que : $\int (\sqrt{x}+1)(x-\sqrt{x}+1)dx = \frac{2}{5}(\sqrt{x})^5 + x + C$

   On pose $f_2(x) = (\sqrt{x}+1)(x-\sqrt{x}+1)$ et $F_2(x) = \frac{2}{5}(\sqrt{x})^5 + x$.
   Remarquons que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned}
F_2'(x) &= \left(\frac{2}{5}(\sqrt{x})^5 + x\right)' \\
&= \left(\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} + x\right)' \\
&= \frac{2}{5} \times \frac{5}{2}\, x^{\frac{5}{2}-1} + 1 \\
&= x^{\frac{3}{2}} + 1 \\
&= (x^{\frac{1}{2}})^3 + 1 \\
&= (\sqrt{x})^3 + 1 \\
&= x\sqrt{x} + 1.
\end{aligned}$$

   D'autre part, on a :

$$\begin{aligned}
f_2(x) &= (\sqrt{x}+1)(x-\sqrt{x}+1) \\
&= x\sqrt{x} - x + \sqrt{x} + x - \sqrt{x} + 1 \\
&= x\sqrt{x} + 1.
\end{aligned}$$

   D'où : $F_2'(x) = f_2(x)$
   Alors, F_2 est une primitive de f_2 et par suite

$$\int f_2(x)dx = F_2(x) + C.$$

3. Montrons que : $\int \frac{\sqrt{x} - x^3 e^x + x^2}{x^3} dx = C - \frac{2}{3x\sqrt{x}} - e^x + \ln|x|$

   On pose : $f_3(x) = \frac{\sqrt{x} - x^3 e^x + x^2}{x^3}$ et $F_3(x) = -\frac{2}{3x\sqrt{x}} - e^x + \ln|x|$

On a :

$$\begin{aligned}
F_3'(x) &= \left(-\frac{2}{3x\sqrt{x}} - e^x + \ln|x|\right)' \\
&= \left(-\frac{2}{3x^{1+\frac{1}{2}}} - e^x + \ln|x|\right)' \\
&= \left(-\frac{2}{3}x^{-\frac{3}{2}} - e^x + \ln|x|\right)' \\
&= \left(-\frac{2}{3}\right) \times \left(-\frac{3}{2}\right) x^{-\frac{3}{2}-1} - e^x + \frac{1}{x} \\
&= x^{-\frac{5}{2}} - e^x + \frac{1}{x} \\
&= \frac{x^{\frac{-3}{2}} - xe^x + 1}{x} \\
&= \frac{x^{\frac{1}{2}} - x^3e^x + x^2}{x^3} \\
&= \frac{\sqrt{x} - x^3e^x + x^2}{x^3} \\
&= f_3(x).
\end{aligned}$$

Alors, F_3 est une primitive de f_3 et par suite

$$\int f_3(x)dx = F_3(x) + C.$$

4. Montrons que : $\displaystyle\int \frac{1+\cos^2(x)}{1+\cos(2x)}dx = \frac{1}{2}\tan(x) + \frac{1}{2}x + C$

   On pose : $f_4(x) = \dfrac{1+\cos^2(x)}{1+\cos(2x)}$ et $F_4(x) = \dfrac{1}{2}\tan(x) + \dfrac{1}{2}x$

   Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned}
F_4'(x) &= \left(\frac{1}{2}\tan(x) + \frac{1}{2}x\right)' \\
&= \frac{1}{2}\frac{1}{\cos^2(x)} + \frac{1}{2} \\
&= \frac{1+\cos^2(x)}{2\cos^2(x)} \\
&= \frac{1+\cos^2(x)}{1+\cos(2x)} \\
&= f_4(x).
\end{aligned}$$

   Donc, F_4 est une primitive de f_4 et par suite

$$\int f_4(x)dx = F_4(x) + C.$$

5. Montrons que : $\displaystyle\int \tan^2(x)dx = \tan(x) - x + C$

   On pose : $f_5(x) = \tan^2(x)$ et $F_5(x) = \tan(x) - x$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} F_5'(x) &= (\tan(x) - x)' \\ &= \frac{1}{\cos^2(x)} - 1 \\ &= \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x} \\ &= \frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)} \\ &= \left(\frac{\sin(x)}{\cos(x)}\right)^2 \\ &= \tan^2(x) \\ &= f_5(x). \end{aligned}$$

Alors, d'après la définition (1.1) de la fonction primitive, on déduit que F_5 est une primitive de f_5, et par suite :

$$\int f_5(x)dx = F_5(x) + C.$$

Partie II :

II-Question : En utilisant la table des intégrales, calculer $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos(2x)+\sin^2(x)}dx$

Cette question peut être interprétée comme suit : calculer $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos(2x)+\sin^2(x)}dx$ **en utilisant la méthode directe d'intégration ; cette méthode consiste, grâce aux propriétés des intégrales et aux transformations sur la fonction à intégrer, à utiliser la table des principales primitives**.

On a :

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\cos(2x)+\sin^2(x)}dx &= \int \frac{dx}{\cos^2(x)-\sin^2(x)+\sin^2(x)} \\ &= \int \frac{dx}{\cos^2(x)} \\ &= \tan(x) + C. \end{aligned}$$

2 Rappel sur la méthode d'intégration des fonctions rationnelles

Méthode de calcul de $\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx$ avec $\deg(P(x)) < \deg(Q(x))$ (Fraction régulière) :

Si $Q(x) = 0$admet des racines réelles simples

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{x-x_1} + \frac{A_2}{x-x_2} + \cdots + \frac{A_n}{x-x_n}.$$

Si $Q(x) = 0$ admet des racines réelles multiples

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_{11}}{x-x_1} + \frac{A_{12}}{(x-x_1)^2} + \cdots + \frac{A_{1m_1}}{(x-x_1)^{m_1}}$$

$$+ \frac{A_{21}}{x-x_2} + \frac{A_{22}}{(x-x_2)^2} + \cdots + \frac{A_{2m_2}}{(x-x_2)^{m_2}}$$

$$+ \frac{A_{n1}}{x-x_n} + \frac{A_{n2}}{(x-x_n)^2} + \cdots + \frac{A_{nm_n}}{(x-x_n)^{m_n}}.$$

m_i est le degré de multiplication de la racine x_i.

Si $Q(x) = 0$ admet des racines complexes simples

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{M_1x+N_1}{x^2+p_1x+q_1} + \frac{M_2x+N_2}{x^2+p_2x+q_2} + \cdots + \frac{M_nx+N_n}{x^2+p_nx+q_n}.$$

Si $Q(x) = 0$ admet des racines complexes multiples

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{M_{11}x+N_{11}}{x^2+p_{11}x+q_{11}} + \frac{M_{12}x+N_{12}}{(x^2+p_{11}x+q_{11})^2} + \cdots + \frac{M_{1m_1}x+N_{1m_1}}{(x^2+p_{11}x+q_{11})^{m_1}}$$

$$+\ldots+$$

$$\frac{M_{n1}x+N_{n1}}{x^2+p_{n1}x+q_{n1}} + \frac{M_{n2}x+N_{n2}}{(x^2+p_{n1}x+q_{n1})^2} + \cdots + \frac{M_{nm_n}x+N_{nm_n}}{(x^2+p_{n1}x+q_{n1})^{m_n}}.$$

Alors, l'intégrale d'une fraction rationnelle revient à calculer 4 types d'intégrales

Type 1

$$\int \frac{A}{x-a} = \ln|x-a| + C$$

Type 2

$$\int \frac{-A}{(x-a)^m} = \frac{A}{m-1}\frac{1}{(x-a)^{m-1}} + C$$

Type 3

$$\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx$$

Type 4

$$\int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}dx$$

Pour calculer les intégrales de type **3** et **4**, on effectue le changement de variable :

$t = x + \frac{p}{2}$, et on aura :

$dx = dt$ et $x^2 + px + q = (x + \frac{p}{2})^2 + a^2$.

tel que : $a = \sqrt{q - \frac{p^2}{4}}$.

Méthode de calcul de $\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx$ avec $\deg(P(x)) > \deg(Q(x))$ (Fraction irrégulière) :

On fait la division Euclidienne de $P(x)$ sur $Q(x)$ jusqu'à l'obtention d'un reste $R(x)$ dont le degré est inférieure strictement au degré de $Q(x)$.

$$\begin{array}{l|l} P(x) & Q(x) \\ \hline R(x) & S(x) \end{array}$$

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \underbrace{S(x)}_{\text{Polynôme}} + \underbrace{\frac{R(x)}{Q(x)}}_{\text{Fraction régulière}}$$

Alors, $\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx = \int S(x)dx + \int \frac{R(x)}{Q(x)}dx.$

2.1 Solution de l'exercice 4

A l'aide de **la méthode de décomposition des fonctions rationnelles en éléments simples**, calculons les intégrales suivantes :

1. Calculons $\displaystyle\int \frac{xdx}{(x-1)(2x+1)}$:

   On a :
$$\int \frac{xdx}{(x+1)(2x+1)} = \int \frac{xdx}{2(x+1)(x+\frac{1}{2})} = \frac{1}{2}\int \frac{xdx}{(x+1)(x+\frac{1}{2})}$$

   Posons :
$$P(x) = x \quad \text{et} \quad Q(x) = (x+1)(x+\frac{1}{2})$$

   Étape1 : Étude de la régularité de la fraction

   Tout d'abord, remarquons que $deg(P(x)) = 1 < deg(Q(x)) = 2$, donc, on déduit que **la fraction** $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ **est régulière**.

   Étape2 : Décomposition de la fraction en éléments simples

   De plus, l'équation $Q(x) = 0$ admet deux racines réelles simples : -1 et $\dfrac{-1}{2}$ donc, d'après le **théorème fondamental de la décomposition**, la fraction $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ se décompose en **éléments simples de type I** comme suit :
$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+\frac{1}{2}}.$$

   Étape3 : Calcul des coefficients

   La méthode de calculer les coefficients A et B s'appelle **la méthode des coefficients indéterminés** et on procède comme suit :

   (a) En réduisant au même dénominateur les fractions du membre droit de l'équation ci-dessus, on obtient :
$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{x}{(x+1)(x+\frac{1}{2})} = \frac{(A+B)x + (\frac{A}{2}+B)}{(x+1)(x+\frac{1}{2})}$$

   (b) En égalisant les coefficients des numérateurs de la relation ci-dessus et par identification, on obtient le système des équations suivant :
$$\begin{cases} A+B = 1, \\ \frac{A}{2} + B = 0. \end{cases}$$

   (c) La résolution de ce système donne : $A = 2$ et $B = -1$.
   Ce qui implique que :
$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{2}{x+1} + \frac{-1}{x+\frac{1}{2}}.$$

   Étape4 : Calcul de l'intégrale

Par suite,

$$\begin{aligned}\int \frac{xdx}{(x-1)(2x+1)} &= \frac{1}{2}\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx \\ &= \frac{1}{2}\Big(\int \frac{2}{x+1}dx - \int \frac{dx}{x+\frac{1}{2}}\Big)dx \\ &= \frac{1}{2}\Big[\Big(2\ln|x+1| + C_1\Big) - \Big(\ln|x+\frac{1}{2}| + C_2\Big)\Big)\end{aligned}$$

En conséquence

$$\int \frac{xdx}{(x-1)(2x+1)} = \ln|x+1| - \frac{1}{2}\ln|x+\frac{1}{2}| + C.$$

2. Calculons $\displaystyle\int \frac{2x^2+41x-91}{(x-1)(x+3)(x-4)}dx$: (la 3ème Question de l'exo 4)

Posons :

$$P(x) = 2x^2 + 41x - 91 \quad \text{et} \quad Q(x) = (x-1)(x+3)(x-4)$$

Étape1 : Étude de la régularité de la fraction

Tout d'abord, remarquons que : $deg(P(x)) = 2 < 3 = deg(Q(x))$, donc, on déduit que la fraction $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ est régulière.

Étape2 : Décomposition de la fraction en éléments simples

De plus, l'équation $Q(x) = 0$ admet trois racines réelles simples : $1, -3$ et 4, donc, d'après **le théorème fondamental de la décomposition**, la fraction $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ se décompose en **éléments simples de type I** comme suit :

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+3} + \frac{C}{x-4}.$$

Étape3 : Calcul des coefficients

Par **la méthode des coefficients indéterminés**, on trouve $A = 4$, $B = -7$ et $C = 5$.

Donc,

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{4}{x-1} + \frac{-7}{x+3} + \frac{5}{x-4}.$$

Étape4 : Calcul de l'intégrale

Par suite,

$$\begin{aligned}\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx &= \int \Big(\frac{4}{x-1} + \frac{-7}{x+3} + \frac{5}{x-4}\Big)dx \\ &= 4\int \frac{dx}{x-1} - 7\int \frac{dx}{x+3} + 5\int \frac{dx}{x-4} \\ &= 4\ln|x-1| + C_1 - 7\ln|x+3| + C_2 + 5\ln|x-4| + C_3.\end{aligned}$$

En conséquence

$$\int \frac{2x^2+41x+91}{(x-1)(x+3)()x-4}dx = 4\ln|x-1| - 7\ln|x+3| + 5\ln|x-4| + C.$$

3. Calculons $\displaystyle\int \frac{4x+3}{(x-2)^3}dx$: (la 3ème Question de l'exo 2)

Posons :

$$P(x) = 4x + 3 \quad \text{et} \quad Q(x) = (x-2)^3$$

Étape1 : Étude de la régularité de la fraction
Tout d'abord, remarquons que : $deg(P(x)) = 1 < 3 = deg(Q(x))$, donc, on déduit que **la fraction** $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ **est régulière**.

Étape2 : Décomposition de la fraction en éléments simples
De plus, l'équation $Q(x) = 0$ admet une racine réelle multiple : $x = 2$. Alors, d'après **le théorème fondamental de la décomposition**, la fraction $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ se décompose **en éléments simples de type I et II** comme suit :

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{(x-2)^2} + \frac{C}{(x-2)^3}.$$

Étape3 : Calcul des coefficients
Par **la méthode des coefficients indéterminés**, on trouve $A = 0$, $B = 4$ et $C = 11$.
Donc,

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{4}{(x-2)^2} + \frac{11}{(x-2)^3}.$$

Étape4 : Calcul de L'intégrale
Par suite,

$$\begin{aligned}\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx &= \int \Big(\frac{4}{(x-2)^2} + \frac{11}{(x-2)^3}\Big)dx \\ &= 4\int \frac{dx}{(x-2)^2} + 11\int \frac{dx}{(x-2)^3} \\ &= \frac{-4}{x-2} + C_1 - \frac{11}{2} \times \frac{1}{(x-2)^2} + C_2.\end{aligned}$$

En conséquence,

$$\int \frac{4x+3}{(x-2)^3}dx = \frac{-4}{x-2} - \frac{11}{2} \times \frac{1}{(x-2)^2} + C.$$

4. Calculons $\int \dfrac{xdx}{2x^2-3x-2}$ (la 2ème Question de l'exo 4)

Posons :

$$P(x) = x \quad \text{et} \quad Q(x) = 2x^2 - 3x - 2$$

.

Étape1 : Étude de la régularité de la fraction
Tout d'abord, remarquons que : $deg(P(x)) = 1 < deg(Q(x)) = 2$, donc, on déduit que **la fraction** $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ **est régulière**.

Étape2 : Décomposition de la fraction en éléments simples
De plus, l'équation $Q(x) = 0$ admet deux racines réelles simples : $\dfrac{-1}{2}$ et 2. Alors, en factorisant le dénominateur $Q(x)$ en éléments simples, on obtient : $Q(x) = 2(x+\dfrac{1}{2})(x-2)$ et par suite

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{x}{2(x+\frac{1}{2})(x-2)}$$

Posons : $Q'(x) = (x+\dfrac{1}{2})(x-2)$
Donc,

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{1}{2}\frac{P(x)}{Q'(x)}$$

Alors, d'après **le théorème fondamental de la décomposition**, la fraction $\dfrac{P(x)}{Q'(x)}$ se décompose **en éléments simples de type I** comme suit :

$$\frac{P(x)}{Q'(x)} = \frac{A}{x+\frac{1}{2}} + \frac{B}{x-2}.$$

Étape3 : Calcul des coefficients

Par **la méthode des coefficients indéterminés**, on trouve : $A = \frac{1}{5}$ et $B = \frac{4}{5}$.

Donc,

$$\frac{P(x)}{Q'(x)} = \frac{\frac{1}{5}}{x+\frac{1}{2}} + \frac{\frac{4}{5}}{x-2}.$$

Ce qui implique que,

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{\frac{1}{10}}{x+\frac{1}{2}} + \frac{\frac{2}{5}}{x-2}.$$

Étape4 : Calcul de l'intégrale

Par suite,

$$\begin{aligned}\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx &= \int \Big(\frac{\frac{1}{10}}{x+\frac{1}{2}} + \frac{\frac{2}{5}}{x-2}\Big)dx \\ &= \frac{1}{10}\int \frac{dx}{x+\frac{1}{2}} + \frac{2}{5}\int \frac{dx}{x-2} \\ &= \frac{1}{10}\ln|x+\frac{1}{2}| + C_1 + \frac{2}{5}\ln|x-2| + C_2.\end{aligned}$$

En conséquence,

$$\int \frac{xdx}{2x^2-3x-2} = \frac{1}{10}\ln|x+\frac{1}{2}| + \frac{2}{5}\ln|x-2| + C$$

5. Calculons $\displaystyle\int \frac{dx}{6x^3-7x^2-3x}dx$: (la 4ème Question de l'exo 4)

   Posons :

$$P(x) = 1 = x^0 \quad \text{et} \quad Q(x) = 6x^3 - 7x^2 - 3x$$

Étape1 : Ètude de la régularité de la fraction

Tout d'abord, remarquons que : $deg(P(x)) = 0 < 3 = deg(Q(x))$, donc, on déduit que **la fraction** $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ **est régulière**.

Étape2 : Décomposition en éléments simples la fraction

En factorisant le dénominateur $Q(x)$ en éléments simples, on obtient :

$$\begin{aligned} Q(x) &= 6x^3 - 7x^2 - 3x \\ &= x(6x^2 - 7x - 3) \\ &= x\frac{1}{6}(x+\frac{1}{3})(x-\frac{3}{2}) \\ &= \frac{1}{6}x(x+\frac{1}{3})(x-\frac{3}{2}) \end{aligned}$$

Alors, l'équation $Q(x) = 0$ admet 3 racines réelles simples : $0, -\frac{1}{3}$ et $\frac{3}{2}$.

Posons : $Q'(x) = x(x+\frac{1}{3})(x-\frac{3}{2})$

Par suite, $\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{1}{6}\frac{P(x)}{Q'(x)}$.

Donc, d'après **le théorème fondamental de la décomposition**, la fraction $\frac{P(x)}{Q'(x)}$ se décompose en **éléments simples de type I** comme suit :

$$\frac{P(x)}{Q'(x)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+\frac{1}{3}} + \frac{C}{x-\frac{3}{2}}.$$

Étape3 : Calcul des coefficients

Par la **méthode des coefficients indéterminés**, on trouve : $A = -2$, $B = \frac{18}{11}$ et $C = \frac{4}{11}$.

Ce qui implique que,

$$\frac{P(x)}{Q'(x)} = \frac{-2}{x} + \frac{\frac{18}{11}}{x+\frac{1}{3}} + \frac{\frac{4}{11}}{x-\frac{3}{2}}.$$

D'où,

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{-\frac{1}{3}}{x} + \frac{\frac{3}{11}}{x+\frac{1}{3}} + \frac{\frac{2}{33}}{x-\frac{3}{2}}.$$

Étape4 : Calcul de l'intégrale

Par suite

$$\begin{aligned} \int \frac{P(x)}{Q(x)}dx &= \int \Big(\frac{-\frac{1}{3}}{x} + \frac{\frac{3}{11}}{x+\frac{1}{3}} + \frac{\frac{2}{33}}{x-\frac{3}{2}}\Big)dx \\ &= -\frac{1}{3}\int\frac{dx}{x} + \frac{3}{11}\int\frac{dx}{x+\frac{1}{3}} + \frac{2}{33}\int\frac{dx}{x-\frac{3}{2}} \\ &= -\frac{1}{3}\ln|x| + C_1 + \frac{3}{11}\ln|x+\frac{1}{3}| + C_2 + \frac{2}{33}\ln|x-\frac{3}{2}| + C_3. \end{aligned}$$

En conséquence

$$\int \frac{dx}{6x^3 - 7x^2 - 3x}dx = -\frac{1}{3}\ln|x| + \frac{3}{11}\ln|x+\frac{1}{3}| + \frac{2}{33}\ln|x-\frac{3}{2}| + C.$$

6. Calculons $\int \frac{1+2x^2}{x^2(1+x^2)}dx$: (la 1ière Question de la partie II de l'exo 1)

Posons :

$$P(x) = 1 + 2x^2 \quad \text{et} \quad Q(x) = x^2(1+x^2).$$

Étape1 : Étude de la régularité de la fraction
Tout d'abord, remarquons que : $\deg(P(x)) = 2 < 4 = \deg(Q(x))$ donc, on déduit que **la fraction $\frac{P(x)}{Q(x)}$ est régulière**.

Étape2 : Décomposition de la fraction en éléments simples
De plus, l'équation $Q(x) = 0$ admet une racine réelle multiple qui est 0 et deux racines complexes simples : $-i$ et i. Alors, d'après **le théorème fondamental de la décomposition**, la fraction $\frac{P(x)}{Q(x)}$ se décompose en **éléments simples de types I, II et III** comme suit :

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{1+2x^2}{x^2(1+x^2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{Mx+N}{1+x^2}.$$

Étape3 : Calcul des coefficients
Par **la méthode des coefficients indéterminés**, on obtient $A = 0,\ B = 1,\ M = 0$ et $N = 1$.
Donc,

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{1+2x^2}{x^2(1+x^2)} = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{1+x^2}.$$

Étape4 : Calcul de l'intégrale
Par suite,

$$\begin{aligned}\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx &= \int \frac{1+2x^2}{x^2(1+x^2)}dx \\ &= \int \frac{dx}{x^2} + \int \frac{dx}{1+x^2} \\ &= -\frac{1}{x} + C_1 + \arctan(x) + C_2.\end{aligned}$$

En conséquence,

$$\int \frac{1+2x^2}{x^2(1+x^2)}dx = -\frac{1}{x} + \arctan(x) + C.$$

7. Calculons $\int \frac{(1+x)^2}{x(1+x^2)}dx$: (la 3ème Question de la partie II de l'exo 1)
   Posons :

$$P(x) = (1+x)^2 \quad \text{et} \quad Q(x) = x(1+x^2).$$

Étape1 : Étude de la régularité de la fraction
Tout d'abord, remarquons que : $\deg(P(x)) = 2 < \deg(Q(x)) = 3$, donc, on déduit que **la fraction $\frac{P(x)}{Q(x)}$ est régulière**.

Étape2 : Décomposition de la fraction en éléments simples
De plus, l'équation $Q(x) = 0$ admet une racine réelle simple : 0 et deux racines complexes simples $-i$ et i. Alors, d'après **le théorème fondamental de la décomposition**, la fraction $\frac{P(x)}{Q(x)}$ se décompose **en élément simples de types I et III** comme suit :

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{(1+x)^2}{x(1+x^2)} = \frac{A}{x} + \frac{Mx+N}{1+x^2}.$$

Étape3 : Calcul des coefficients
Par la **méthode des coefficients indéterminés**, on obtient : $A = 1,\ M = 0$ et $N = 2$.

Étape4 : Calcul de l'intégrale
Par suite,

$$\begin{aligned}\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx &= \int \frac{(1+x)^2}{x(1+x^2)}dx \\ &= \int \frac{dx}{x} + 2\int \frac{dx}{1+x^2} \\ &= \ln|x| + C_1 + 2\arctan(x) + C_2.\end{aligned}$$

En conséquence :

$$\int \frac{(1+x)^2}{x(1+x^2)}dx = \ln|x| + 2\arctan(x) + C.$$

8. Calculons $\int \frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x}dx$: (la 5 ème Question de l'exo 4)

Posons :

$$P(x) = x^5 + x^4 - 8 \quad \text{et} \quad Q(x) = x^3 - 4x$$

Étape1 : Étude de la régularité de la fraction

Tout d'abord, remarquons que $deg(P(x)) = 5 > 3 = deg(Q(x))$, alors, **la fraction** $\frac{P(x)}{Q(x)}$ **est irrégulière (non régulière)**

Étape2 : Division Euclidienne de $P(x)$ sur $Q(x)$.
En faisant la division Euclidienne du numérateur $P(x)$ sur le dénominateur $Q(x)$ **jusqu'à l'obtention d'un reste dont le degré est inférieur strictement au degré de $Q(x)$**, on trouve :

$$\frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x} = \underbrace{x^2+x+4}_{\textbf{Quotient}} + \frac{\overbrace{4x^2+16x-8}^{\textbf{Reste}}}{\underbrace{x^3-4x}_{\textbf{Diviseur}}}$$

Posons : $S(x) = x^2 + x + 4$ et $R(x) = 4x^2 + 16x - 8$.
Donc,

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = S(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$$

Remarquons que : $\deg R(x) = 4x^2 + 16x - 8 = 2 < 3 = \deg Q(x) = x^3 - 4x$, donc **la fraction** $\frac{4x^2+16x-8}{x^3-4x}$ **est régulière**.

Étape3 : Calcul de l'intégrale
On a,

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx = \int S(x)dx + \int \frac{R(x)}{Q(x)}dx$$

Alors,

$$\int \underbrace{\frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x}}_{\textbf{Fraction irrégulière}}dx = \int \underbrace{x^2+x+4}_{\textbf{Polynome}}dx + \int \underbrace{\frac{4x^2+16x-8}{x^3-4x}}_{\textbf{Fraction régulière}}dx.$$

C-à-d, l'intégrale d'une fraction irrégulière se ramène à calculer une intégrale polynomiale et une intégrale d'une fraction régulière.

Étape4 : Calcul de l'intégrale de la fraction régulière $\int \frac{4x^2+16x-8}{x^3-4x}dx$
Remarquons que :

$$Q(x) = x^3 - 4x = x(x^2-4) = x(x-2)(x+2)$$

Alors, l'équation $Q(x) = 0$ admet trois racines réelles simples : $0, -2$ et 2, donc, d'après **le théorème fondamental de la décomposition**, la fraction $\dfrac{R(x)}{Q(x)} = \dfrac{4x^2+16x-8}{x^3-4x}$ se décompose **en éléments simples de type I** comme suit :

$$\frac{R(x)}{Q(x)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{x-2}.$$

Par la méthode des coefficients indéterminés, on trouve $A = 2$, $B = 5$ et $C = -3$.
Donc,

$$\frac{R(x)}{Q(x)} = \frac{2}{x} + \frac{5}{x+2} + \frac{-3}{x-2}.$$

Par suite,

$$\begin{aligned}\int \frac{R(x)}{Q(x)}dx &= \int \Big(\frac{2}{x} + \frac{5}{x+2} + \frac{-3}{x-2}\Big)dx \\ &= 2\int \frac{dx}{x} + 5\int \frac{dx}{x+2} - 3\int \frac{dx}{x-2} \\ &= 2\ln|x| + C_1 + 5\ln|x+2| + C_2 - 3\ln|x-2| + C_3. \\ &= 2\ln|x| + 5\ln|x+2| + -3\ln|x-2| + C_4.\end{aligned}$$

Étape5 : Calcul de l'intégrale de la fraction irrégulière $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$.
Par conséquent :

$$\begin{aligned}\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx &= \int (x^2+x+4)dx + 2\ln|x| + 5\ln|x+2| - 3\ln|x-2| + C_4. \\ &= \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 4x + C_5 + 2\ln|x| + 5\ln|x+2| - 3\ln|x-2| + C_4.\end{aligned}$$

Finalement, on déduit que :

$$\int \frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x}dx = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 4x + 2\ln|x| + 5\ln|x+2| - 3\ln|x-2| + C.$$

3 Rappel sur la méthode d'intégration des fonctions irrationnelles

Intégration de certaines classes de fonctions Irrationnelles

Certaines **fonctions irrationnelles** peuvent se ramener à une intégration de **fonctions rationnelles** par **un changement de variable**.

<table>
<tr><th>Forme de l'intégrale</th><th colspan="3">Le changement de variable convenable</th></tr>
<tr><td>I. $\int R(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}})\, dx$
tel que : $ad - cb \neq 0$.</td><td colspan="3">Posons : $t = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$.
On obtient, après calcul :
$t^n = \frac{ax+b}{cx+d}$, $x = \frac{dt^n-b}{a-ct^n}$ et $dx = \frac{n(ad-cb)t^{n-1}}{(a-ct^n)^2}dt.$
D'où :
$\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) d = \int R\left(\frac{dt^n-b}{a-ct^n}, t\right)\frac{n(ad-cb)t^{n-1}}{(a-ct^n)^2}dt = \int R^*(t)\, dt.$

Où, R^* est une fonction rationnelle en t.</td></tr>
<tr><td>II. $\int R(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_1}{n_1}}, \dots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_k}{n_k}})\, dx$
tel que : $m_i \in \mathbb{Z};\ \forall i \in \{1,..,k\}$,
$n_i \in \mathbb{N}^*, \forall i \in \{1,..,k\}, ad - cb \neq 0$.</td><td colspan="3">Posons : $t^r = \frac{ax+b}{cx+d}$ tel que : $r = PPCM(n_1, n_2, \dots, n_k)$.
On obtient, après calcul :
$x = \frac{dt^r-b}{a-ct^r} = l(t)$, $dx = l'(t)$, et $\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_i}{n_i}} = t^{r\frac{m_i}{n_i}}, i \in \{1,..,k\}.$

En remplaçant ces valeurs dans l'intégrale initiale, on obtient :
$\int R(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_1}{n_1}}, \dots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_k}{n_k}})\, dx = \int R^{**}(t)\, dt,$

avec R^{**} est évidement une fonction rationnelle en t.</td></tr>
<tr><td rowspan="4">III. $\int x^m(a + bx^n)^p dx,$
tel que : $a, b \in \mathbb{R}; m, n, p \in \mathbb{Q}$.</td><td colspan="3">On étudie séparément les trois cas suivants :</td></tr>
<tr><td>Cas 1 :</td><td>Cas 2 :</td><td>Cas 3 :</td></tr>
<tr><td>Si p ∈ ℤ</td><td>Si $\frac{m+1}{n} \in \mathbb{Z}$ et
p fractionnaire</td><td>Si $\frac{m+1}{n}$ et p des nombres fractionnaires mais $\frac{m+1}{n}$+p∈ ℤ</td></tr>
<tr><td>Posons :
$x = z^k$,

où
k est le dénominateur commun des fractions m et n.</td><td>Posons :
$a + bx^n = z^k$,

où
k est le dénominateur de p.</td><td>Posons :
$\frac{a+bx^n}{x^n} = z^k$,

où
k est le dénominateur de p.</td></tr>
</table>

3.1 Solution de l'exercice 2

A l'aide d'un changement de variable, calculons :

1. $\displaystyle\int \frac{dx}{1+\sqrt{x+1}}$:

   Remarquons que cette intégrale est de la forme $\displaystyle\int R(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}})dx$ **(forme I voir le tableau)** avec $a = 1,\ b = 1,\ c = 0,\ d = 1$ et $n = 1$. Alors, on effectue le changement de variable suivant :

   $$t = \sqrt{x+1}$$

   Donc,
   $$t^2 = x+1, x = t^2 - 1, dx = 2tdt.$$

   D'où, l'intégrale initiale se transforme comme suit :

   $$\begin{aligned} \textbf{intégrale irrationnelle} \leftarrow \Big[\int \frac{dx}{1+\sqrt{x+1}}\Big] &= \int \frac{2tdt}{1+t} \\ &= 2\Big[\int \frac{t}{1+t}dt\Big] \longrightarrow \textbf{intégrale rationnelle} \\ &= 2\int \frac{1+t-1}{1+t}dt \\ &= 2\int \Big(1 - \frac{1}{1+t}\Big)dt \\ &= 2\Big(\int dt - \int \frac{dt}{1+t}\Big) \\ &= 2t - 2\ln|1+t| + C. \end{aligned}$$

   En remplaçant t par sa valeur en x, on obtient :

   $$\int \frac{dx}{1+\sqrt{x+1}} = 2\sqrt{x+1} - 2\ln|1+\sqrt{x+1}| + C$$

2. $\displaystyle\int \frac{x^3}{\sqrt{x-1}}dx.$

   On a :
   $$\int \frac{x^3}{\sqrt{x-1}}dx = \int x^3(x-1)^{-\frac{1}{2}}dx$$

   Remarquons que cette intégrale est de la forme : $\displaystyle\int x^m(a+bx^n)^p dx$ avec $a = -1,\ b = 1,\ m = 3,\ p = -\frac{1}{2}$ et $n = 1$.

   De plus, **comme** $p = -\frac{1}{2}$ **est fractionnaire et** $\dfrac{m+1}{n} = \dfrac{3+1}{1} = 4 \in \mathbb{Z}$, on déduit qu'on est dans **le deuxième cas de la forme III (voir le tableau)**. Pour cela, on effectue le changement de variable suivant :

   $$a + bx^n = t^k \ \text{ avec k est la dénominateur de p.}$$

   C-à-d : $t^2 = x - 1$.

   Donc, $t^2 + 1 = x$, $dx = 2tdt$.

En faisant ce changement de variable, on obtient :

$$\begin{aligned}\textbf{intégrale irrationnelle}\longleftarrow\Big[\int \frac{x^3}{\sqrt{x-1}}dx\Big] &= \int \frac{(t^2+1)^3}{t}2tdt \\ &= 2\Big[\int (t^2+1)^3dt\Big]\longrightarrow\textbf{intégrale rationnelle} \\ &= 2\int (t^6+3t^4+3t^2+1)dt \\ &= \frac{2}{7}t^7+\frac{6}{5}t^5+2t^3+2t+C\end{aligned}$$

En remplaçant t par sa valeur en x, on trouve :

$$\int \frac{x^3}{\sqrt{x-1}}dx = \frac{2}{7}(\sqrt{x-1})^7+\frac{6}{5}(\sqrt{x-1})^5+2(\sqrt{x-1})^3+2\sqrt{x-1}+C.$$

3. $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{x+1}} = \int x^{-1}(x+1)^{-\frac{1}{2}}dx$

On a :

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x+1}} = \int x^{-1}(x+1)^{-\frac{1}{2}}dx$$

Remarquons que cette intégrale est de la forme $\displaystyle\int x^m(a+bx^n)^p dx$ avec $a=1,\ b=1,\ n=1,\ m=-1$ et $p=-\frac{1}{2}$.

Comme $p=-\frac{1}{2}$ **est fractionnaire et** $\dfrac{m+1}{n} = \dfrac{-1+1}{1} = 0 \in \mathbb{Z}$ alors, on déduit qu'on est dans **le deuxième cas de la forme III (voir le tableau)**. Pour cela, on effectue le changement de variable suivant :

$$a+bx^n = t^k \quad \text{avec k est la dénominateur de p}$$

C-à-d : $t^2 = x+1$ Donc,

$$t^2-1 = x, dx = 2tdt$$

En remplaçant ces expressions dans l'intégrale donnée, on obtient :

$$\begin{aligned}\textbf{intégrale irrationnelle}\longleftarrow\Big[\int \frac{dx}{x\sqrt{x+1}}dx\Big] &= \int \frac{2tdt}{(t^2-1)t} \\ &= 2\Big[\int \frac{dt}{t^2-1}\Big]\rightarrow\textbf{intégrale rationnelle}.\end{aligned}$$

Maintenant, calculons $\displaystyle\int \frac{dt}{t^2-1}$ en utilisant la méthode de la décomposition des fonctions rationnelles.
Posons : $P(t)=1$ et $Q(t)=t^2-1$.

Remarquons tout d'abord que **la fraction** $\dfrac{P(t)}{Q(t)}$ **est régulière**. De plus, l'équation $Q(t)=0$ admet deux racines réelles simples : -1 et 1. Alors, d'après **le théorème fondamental de la décomposition**, la fraction $\dfrac{P(t)}{Q(t)}$ se décompose **en éléments simples de type I** comme suit :

$$\frac{P(t)}{Q(t)} = \frac{A}{t-1}+\frac{B}{t+1}.$$

Par **la méthode des coefficients indéterminés**, on obtient $A=\frac{1}{2}$ et $B=-\frac{1}{2}$.
D'où :

$$\frac{P(t)}{Q(t)} = \frac{\frac{1}{2}}{t-1}+\frac{-\frac{1}{2}}{t+1}.$$

Par suite :

$$\begin{aligned}
\int \frac{P(t)}{Q(t)}dt &= \int \frac{dt}{t^2-1} \\
&= \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t-1} - \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t+1} \\
&= \frac{1}{2}\ln|t-1| - \frac{1}{2}\ln|t+1| + C \\
&= \frac{1}{2}\Big(\ln|t-1| - \ln|t+1|\Big) + C \\
&= \frac{1}{2}\ln|\frac{t-1}{t+1}| + C.
\end{aligned}$$

En conséquence,

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{x\sqrt{x+1}} &= 2\int \frac{dt}{t^2-1} \\
&= \ln\Big|\frac{t-1}{t+1}\Big| + C
\end{aligned}$$

En remplaçant t par sa valeur en x, on trouve :

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x+1}} = \ln\Big|\frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}+1}\Big| + C$$

4. $\displaystyle\int \frac{x+1}{x\sqrt{x-2}}dx$

Remarquons tout d'abord que :

$$\begin{aligned}
\int \frac{x+1}{x\sqrt{x-2}}dx &= \int \frac{x}{x\sqrt{x-2}}dx + \int \frac{1}{x\sqrt{x-2}}dx \\
&= \int \frac{dx}{\sqrt{x-2}} + \int \frac{dx}{x\sqrt{x-2}}
\end{aligned}$$

Posons : $J_1 = \displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x-2}}$ et $J_2 = \displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{x-2}}$ et calculons les séparément.

Calculons $J_1 = \displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x-2}}$

Cette intégrale est de la forme : $\displaystyle\int R\big(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\big)dx$ avec $a=1,\ b=-2,\ c=0,\ d=1$ et $n=2$.
Alors, on effectue le changement de variable suivant :

$$t = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}} = \sqrt{x-2}.$$

Donc, $t^2 = x-2, t^2+2 = x, dx = 2tdt$.
En remplaçant ces expressions dans l'intégrale J_1, on obtient :

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x-2}} = \int \frac{2tdt}{t} = 2t + C_1.$$

D'où,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x-2}} = 2\sqrt{x-2} + C_1$$

Calculons $J_2 = \int \frac{dx}{x\sqrt{x-2}}$

On a :

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x-2}} = \int x^{-1}(x-2)^{-\frac{1}{2}}$$

Cette intégrale est de la forme : $\int x^m(a+bx^n)^p dx$, avec : $m=-1, a=-2, b=1, n=1, p=-\frac{1}{2}$

Comme : $\frac{m+1}{n} = \frac{-1+1}{1} = 0 \in \mathbb{Z}$ et $p=-\frac{1}{2}$ **est fractionnaire, alors, on est dans le deuxième cas de la forme III (voir le tableau)**. Pour cela, on effectue le changement de variable suivant :

$$t^k = a+bx^n \quad \text{avec k est le dénominateur de p}$$

C-à-d : $t^2 = x-2$, donc :

$$x = t^2+2, dx = 2tdt$$

Par suite, on a :

$$\begin{aligned}
\textbf{Intégrale irrationnelle}\leftarrow \Big[\int \frac{dx}{x\sqrt{x-2}}\Big] &= \int \frac{2tdt}{(t^2+2)t} \\
&= 2\Big[\int \frac{dt}{t^2+2}\Big] \rightarrow\textbf{Intégrale rationnelle} \\
&= 2\Big[\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{t}{\sqrt{2}} + C_2\Big] \\
&= \sqrt{2}\arctan\frac{t}{\sqrt{2}} + C_3
\end{aligned}$$

En revenant à la variable initiale x, on obtient :

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x-2}} = \sqrt{2}\arctan\sqrt{\frac{x-2}{2}} + C_3$$

Finalement, on déduit que :

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x-2}} = J_1 + J_2 = 2\sqrt{x-2} + \sqrt{2}\arctan\sqrt{\frac{x-2}{2}} + C$$

3.2 Solution de l'exercice 5

Calculons les intégrales irrationnelles suivantes :

1. $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$

   Cette intégrale est de la forme $\int R(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}})dx$ avec $a=1,\ b=0,\ c=0,\ d=1$ et $n=1$. Alors, on effectue le changement de variable suivant :

$$t = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}} = \sqrt{x}$$

   Donc,

$$t^2 = x, dx = 2tdt.$$

Par suite, en tenant compte du changement de variable effectué, on peut écrire :

$$\begin{aligned}
\textbf{intégrale irrationnelle} \leftarrow \int \frac{dx}{1+\sqrt{x}} &= \int \frac{2tdt}{1+t} \\
&= 2\Big[\int \frac{t}{1+t}dt\Big] \rightarrow \textbf{intégrale rationnelle} \\
&= 2\int \frac{1+t-1}{1+t}dt \\
&= 2\int \Big(1-\frac{1}{1+t}\Big)dt \\
&= 2\int dt - 2\int \frac{dt}{1+t} \\
&= 2t - 2\ln|1+t| + C
\end{aligned}$$

En revenant à la variable x, on obtient :

$$\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} - 2\ln|1+\sqrt{x}| + C$$

2. $\displaystyle\int \frac{1+\sqrt{x+1}}{1+\sqrt[3]{x+1}}dx$

On a,

$$\int \frac{1+\sqrt{x+1}}{1+\sqrt[3]{x+1}}dx = \int \frac{1-(x+1)^{\frac{1}{2}}}{1+(x+1)^{\frac{1}{3}}}dx$$

Cette intégrale est de la forme $\displaystyle\int R\Big(x, (\frac{ax+b}{cx+d})^{\frac{m_1}{n_1}}, \cdots, (\frac{ax+b}{cx+d})^{\frac{m_k}{n_k}}\Big)dx$ avec $a=1,\ b=1,\ c=0,\ d=1,$ $\frac{m_1}{n_1}=\frac{1}{2}$ et $\frac{m_2}{n_2}=\frac{1}{3}$ **(forme II voir le tableau)**. Alors, on effectue le changement de variable suivant :

$$t^r = \frac{ax+b}{cx+d} \quad \text{où :} r = PPCM(n_1, n_2)$$

c'est à dire $r = PPCM(2,3) = 6$ et donc, $t^6 = x+1$.
D'où,

$$x = t^6 - 1, dx = 6t^5dt.$$

En remplaçant ces expressions dans l'intégrale initiale, on se ramène à une intégrale d'une fonction rationnelle comme suit :

$$\begin{aligned}
\textbf{intégrale irrationnelle}\leftarrow \Big[\int \frac{1+\sqrt{x+1}}{1+\sqrt[3]{x+1}}dx\Big] &= \int \frac{1-(t^6)^{\frac{1}{2}}}{1+(t^6)^{\frac{1}{3}}} \times 6t^5dt \\
&= 6\int \frac{1-t^3}{1+t^2} \times t^5dt \\
&= 6\Big[\int \frac{t^5-t^8}{1+t^2}dt\Big] \rightarrow\textbf{intégrale rationnelle}
\end{aligned}$$

Maintenant, **calculons l'intégrale rationnelle** $\displaystyle\int \frac{t^5-t^8}{1+t^2}dt$

Posons : $P(t) = t^5 - t^8$ et $Q(t) = 1+t^2$.

On remarque que **la fraction** $\dfrac{P(t)}{Q(t)}$ **est irrégulière**. Alors, **en faisant la division Euclidienne de** $P(t)$

sur $Q(t)$ jusqu'à l'obtention d'un reste dont le degré est inférieur strictement au degré de $Q(t)$ on obtient :

$$\frac{P(t)}{Q(t)} = -t^6 + t^4 + t^3 - t^2 - t + 1 + \frac{t-1}{1+t^2}$$

D'où :

$$\begin{aligned}\int \frac{P(t)}{Q(t)}dt &= \int (-t^6 + t^4 + t^3 - t^2 - t + 1)dt + \int \frac{t-1}{1+t^2}dt \\ &= -\frac{1}{7}t^7 + \frac{1}{5}t^5 + \frac{1}{4}t^4 - \frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{2}t^2 + t + C_1 + \int \frac{t-1}{1+t^2}dt.\end{aligned}$$

Calculons l'intégrale régulière $\displaystyle\int \frac{t-1}{1+t^2}dt$.

On a :

$$\begin{aligned}\int \frac{t-1}{1+t^2}dt &= \int \frac{t}{1+t^2}dt - \int \frac{1}{1+t^2}dt \\ &= \frac{1}{2}\int \frac{2t}{1+t^2}dt - \int \frac{dt}{1+t^2} \\ &= \frac{1}{2}\ln|t^2+1| - \arctan t + C_2\end{aligned}$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned}\int \frac{1+\sqrt{x+1}}{1+\sqrt[3]{x+1}}dx &= 6\int \frac{P(t)}{Q(t)}dt \\ &= -\frac{6}{7}t^7 + \frac{6}{5}t^5 + \frac{3}{2}t^4 - 2t^3 - 3t^2 + 6t + 6C_1 + 3\ln|t^2+1| - 6\arctan t + 6C_2\end{aligned}$$

En revenant à la variable initiale x, on obtient :

$$\begin{aligned}\int \frac{1+\sqrt{x+1}}{1+\sqrt[3]{x+1}}dx = &-\frac{6}{7}(x+1)^{\frac{7}{6}} - \frac{6}{5}(x+1)^{\frac{5}{6}} + \frac{3}{2}(x+1)^{\frac{2}{3}} - 2(x+1)^{\frac{1}{2}} - 3(x+1)^{\frac{1}{3}} \\ &+6(x+1)^{\frac{1}{6}} + 3\ln|(x+1)^{\frac{1}{3}}+1| - 6\arctan(x+1)^{\frac{1}{6}} + C.\end{aligned}$$

3. $\displaystyle\int \frac{dx}{x(1+2\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})}$

On a :

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{x(1+2\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})} &= \int \frac{dx}{x+2x\sqrt{x}+x\sqrt[3]{x}} \\ &= \int \frac{dx}{x+2x^{\frac{3}{2}}+x^{\frac{4}{3}}}\end{aligned}$$

Cette intégrale est de la forme : $\displaystyle\int R\Big(x, (\frac{ax+b}{cx+d})^{\frac{m_1}{n_1}}, \cdots, (\frac{ax+b}{cx+d})^{\frac{m_k}{n_k}}\Big)dx$ avec $a=1,\ b=0,\ c=0,\ d=1$, $\frac{m_1}{n_1}=1$, $\frac{m_2}{n_2}=\frac{3}{2}$ et $\frac{m_3}{n_3}=\frac{4}{3}$ tel que : $ad-bc=1-0=1\neq 0$ **(forme II voir le tableau)**. Alors, on effectue le changement de variable suivant :

$$t^r = \frac{ax+b}{cx+d} \text{ où } r = PPCM(n_1, n_2, n_3)$$

C'est à dire :
$r = PPCM(1,2,3) = 6$ et donc : $t^6 = x$, $dx = 6t^5dt$.

En substituant ces expressions dans l'intégrale, on obtient :

$$\textbf{intégrale irrationnelle}\leftarrow \left[\int \frac{dx}{x(1+2\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})}\right] = \int \frac{dx}{x+2x^{\frac{3}{2}}+x^{\frac{4}{3}}}$$
$$= \int \frac{6t^5dt}{t^6+2t^9+t^8}$$
$$= 6\int \frac{dt}{t+2t^4+t^3}$$
$$= 6\int \frac{dt}{t(1+2t^3+t^2)}$$
$$= 6\int \frac{dt}{t(t+1)(2t^2-t+1)}$$
$$= 3\left[\int \frac{dt}{t(t+1)(t^2-\frac{t}{2}+\frac{1}{2})}\right] \to \textbf{intégrale rationnelle} \tag{3.1}$$

Calculons l'intégrale rationnelle : $\int \frac{dt}{t(t+1)(t^2-\frac{t}{2}+\frac{1}{2})}$

Comme la dénominateur de la fraction $\frac{dt}{t(t+1)(t^2-\frac{t}{2}+\frac{1}{2})}$ admet deux racines réelles simples : 0 et -1 et deux racines complexes simples : $\frac{1-i\sqrt{7}}{4}$ et $\frac{1+i\sqrt{7}}{4}$. Alors, d'après **le théorème fondamental de la décomposition**, la fraction $\frac{dt}{t(t+1)(t^2-\frac{t}{2}+\frac{1}{2})}$ se décompose **en éléments simples de type I et III** comme suit :

$$\frac{dt}{t(t+1)(t^2-\frac{t}{2}+\frac{1}{2})} = \frac{A}{t}+\frac{B}{t+1}+\frac{Mt+N}{t^2-\frac{t}{2}+\frac{1}{2}}.$$

Par la méthode des coefficients indéterminés, on obtient $A=2,\ B=-\frac{1}{2},\ M=-\frac{3}{2}$ et $N=\frac{1}{4}$.
En remplaçant ces valeurs dans l'expression ci-dessus et en intégrant on obtient :

$$\begin{aligned}\int \frac{dt}{t(t+1)(t^2-\frac{t}{2}+\frac{1}{2})} &= 2\int\frac{dt}{t}-\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t+1}+\int\frac{-\frac{3}{2}t+\frac{1}{4}}{t^2-\frac{t}{2}+\frac{1}{2}}dt\\ &= 2\ln|t|+C_1-\frac{1}{2}\ln|t+1|+C_2-\frac{3}{2}\int\frac{t-\frac{1}{6}}{t^2-\frac{t}{2}+\frac{1}{2}}dt\end{aligned} \tag{3.2}$$

Calculons $\int \frac{t-\frac{1}{6}}{t^2-\frac{t}{2}+\frac{1}{2}}dt$

On a :

$$\begin{aligned}\int \frac{t-\frac{1}{6}}{t^2-\frac{t}{2}+\frac{1}{2}}dt &= \frac{1}{2}\int\frac{2t-\frac{1}{3}}{t^2-\frac{t}{2}+\frac{1}{2}}dt\\ &= \frac{1}{2}\int\frac{2t-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}}{t^2-\frac{t}{2}+\frac{1}{2}}dt\\ &= \frac{1}{2}\int\frac{2t-\frac{1}{2}+\frac{1}{6}}{t^2-\frac{t}{2}+\frac{1}{2}}dt\\ &= \frac{1}{2}\left[\int\frac{2t-\frac{1}{2}}{t^2-\frac{t}{2}+\frac{1}{2}}dt+\frac{1}{6}\int\frac{dt}{t^2-\frac{t}{2}+\frac{1}{2}}\right]\\ &= \frac{1}{2}\left[\ln|t^2-\frac{t}{2}+\frac{1}{2}|+C_3+\frac{1}{6}\int\frac{dt}{t^2-\frac{t}{2}+\frac{1}{2}}\right]\end{aligned} \tag{3.3}$$

Calculons $\displaystyle\int \frac{dt}{t^2 - \frac{t}{2} + \frac{1}{2}}$

Remarquons que :

$$\begin{aligned} t^2 - \frac{t}{2} + \frac{1}{2} &= (t - \frac{1}{4})^2 - \frac{1}{16} + \frac{1}{2} \\ &= (t - \frac{1}{4})^2 + \frac{7}{16} \\ &= \left(t - \frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{7}}{4}\right)^2. \end{aligned}$$

Alors, effectuons le changement de variable suivant : **(voir le résumé de la méthode de décomposition des fonctions rationnelles : calcul des intégrales de type III)**

Posons : $z = t - \dfrac{1}{4}, dz = dt$.

Donc,

$$\begin{aligned} \int \frac{dt}{t^2 - \frac{t}{2} + \frac{1}{2}} &= \int \frac{dt}{\left(t - \frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{7}}{4}\right)^2} \\ &= \int \frac{dz}{z^2 + \left(\frac{\sqrt{7}}{4}\right)^2} \\ &= \frac{4}{\sqrt{7}} \arctan\left(\frac{4}{\sqrt{7}} z\right) + C_4 \\ &= \frac{4}{\sqrt{7}} \arctan\left(\frac{4}{\sqrt{7}} (t - \frac{1}{4})\right) + C_4. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Par suite, on trouve,

$$\begin{aligned} \int \frac{t + \frac{1}{6}}{t^2 - \frac{t}{2} + \frac{1}{2}} dt &= \frac{1}{2}\left[\ln|t^2 - \frac{t}{2} + \frac{1}{2}| + C_2 + \frac{1}{6}\int \frac{dt}{t^2 - \frac{t}{2} + \frac{1}{2}}\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[\ln|t^2 - \frac{t}{2} + \frac{1}{2}| + C_2 + \frac{2\sqrt{7}}{21} \arctan\left(\frac{4}{\sqrt{7}}(t - \frac{1}{4})\right) + C_5\right]. \end{aligned}$$

Ce qui implique que :

$$-\frac{3}{2}\int \frac{t + \frac{1}{6}}{t^2 - \frac{t}{2} + \frac{1}{2}} dt = -\frac{3}{4}\ln|t^2 - \frac{t}{2} + \frac{1}{2}| - \frac{\sqrt{7}}{14} \arctan\left(\frac{4}{\sqrt{7}}(t - \frac{1}{4})\right) + C_6.$$

On peut écrire :

$$\int \frac{dt}{t(t+1)(t^2 - \frac{t}{2} + \frac{1}{2})} = 2\ln|t| - \frac{1}{2}\ln|t+1| - \frac{3}{4}\ln|t^2 - \frac{t}{2} + \frac{1}{2}| - \frac{\sqrt{7}}{14} \arctan\left(\frac{4}{\sqrt{7}}(t - \frac{1}{4})\right) + C_7.$$

Par conséquent, on déduit que :

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x(1 + 2\sqrt{x} + \sqrt[3]{x})} &= 3\int \frac{dt}{t(t+1)(t^2 - \frac{t}{2} + \frac{1}{2})} \\ &= 6\ln|t| - \frac{3}{2}\ln|t+1| - \frac{9}{4}\ln|t^2 - \frac{t}{2} + \frac{1}{2}| - \frac{3\sqrt{7}}{14} \arctan\left(\frac{4}{\sqrt{7}}(t - \frac{1}{4})\right) + C \end{aligned}$$

En revenant à la variable initiale x, on obtient :

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x(1 + 2\sqrt{x} + \sqrt[3]{x})} \quad &= 6\ln|\sqrt[6]{x}| - \frac{3}{2}\ln|\sqrt[6]{x} + 1| - \tfrac{9}{4}\ln|\sqrt[3]{x} - \tfrac{\sqrt[6]{x}}{2} + \tfrac{1}{2}| \\ &\quad - \frac{3\sqrt{7}}{14} \arctan\left(\frac{4}{\sqrt{7}}(\sqrt[6]{x} - \tfrac{1}{4})\right) + C \end{aligned}$$

4. $\displaystyle\int \frac{dx}{(1+\sqrt[4]{x})^3\sqrt{x}}$

Remarquons que :

$$\int \frac{dx}{(1+\sqrt[4]{x})^3\sqrt{x}} = \int \frac{dx}{\left(1+x^{\frac{1}{4}}\right)^3 x^{\frac{1}{2}}}$$
$$= \int x^{-\frac{1}{2}}\left(1+x^{\frac{1}{4}}\right)^{-3} dx.$$

Cette intégrale est de la forme :

$$\int x^m(a+bx^n)^p dx \text{ avec } m=\frac{-1}{2},\ a=1,\ b=1,\ n=\frac{1}{4} \text{ et } p=-3.$$

Puisque p **est un entier**, on est dans **le premier cas de la forme III (voir le tableau)**. Donc, on effectue le changement de variable suivant :

$$x = z^k \text{ tel que : k est le dénominateur commun des fractions m et n}$$

C'est à dire :

$$x = z^4, dx = 4z^3dz.$$

Alors,

$$\textbf{intégrale irrationnelle}\leftarrow \left[\int \frac{dx}{(1+\sqrt[4]{x})^3\sqrt{x}}\right] = \int \frac{dx}{\left(1+x^{\frac{1}{4}}\right)^3 x^{\frac{1}{2}}}$$
$$= \int \frac{4z^3dz}{\left(1+(z^4)^{\frac{1}{4}}\right)^3 (z^4)^{\frac{1}{2}}}$$
$$= 4\int \frac{z^3}{(1+z)^3z^2}dz$$
$$= 4\left[\int \frac{z}{(1+z)^3}dz\right] \rightarrow\textbf{intégrale rationnelle}$$

Calculons l'intégrale rationnelle : $\displaystyle\int \frac{z}{(1+z)^3}dz$

Posons : $P(z) = z$ et $Q(z) = (1+z)^3$.

On constate que **la fraction** $\dfrac{P(z)}{Q(z)}$ **est régulière**. De plus, l'équation $Q(z) = 0$ admet une racine réelle multiple : $z = -1$. Alors, d'après **le théorème fondamental de la décomposition**, la fraction $\dfrac{P(z)}{Q(z)}$ se décompose **en éléments simples de type II** comme suit :

$$\frac{P(z)}{Q(z)} = \frac{A}{1+z} + \frac{B}{(1+z)^2} + \frac{C}{(1+z)^3}.$$

Par la méthode des coefficients indéterminés, on obtient : $A = 0$, $B = 1$ et $C = -1$.
D'où,

$$\frac{P(z)}{Q(z)} = \frac{1}{(1+z)^2} - \frac{1}{(1+z)^3}.$$

En intégrant, on trouve :

$$\int \frac{P(z)}{Q(z)}dz = \int \frac{z}{(1+z)^3}dz$$
$$= \int \frac{dz}{(1+z)^2} - \int \frac{dz}{(1+z)^3}$$
$$= -\frac{1}{1+z} + \frac{1}{2}\frac{1}{(1+z)^2} + C.$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{(1+\sqrt[4]{x})^3\sqrt{x}} &= 4\int \frac{z}{(1+z)^3}dz \\ &= -\frac{4}{1+z} + \frac{2}{(1+z)^2} + C\end{aligned}$$

En revenant à la variable initiale x, on trouve :

$$\int \frac{dx}{(1+\sqrt[4]{x})^3\sqrt{x}} = -\frac{4}{1+\sqrt[4]{x}} + \frac{2}{(1+\sqrt[4]{x})^2} + C$$

4 Rappel sur la méthode d'intégration par partie

Méthode d'intégration par partie

Un grand nombre d'intégrales se calcule par cette méthode qu'est donnée par le théorème suivant :

Théorème 4.1. *Soient U, V deux fonctions dérivables sur un intervalle $I \in \mathbb{R}$ telle que la fonction $U'V$ admet une primitive sur I. Alors, la fonction UV' admet une primitive et on a :*

$$\int U \cdot V' = U \cdot V - \int U' \cdot V \tag{4.1}$$

En particulier, ce théorème est vrai si $U, V \in C^1(\mathbb{R})$.

Remarques:	**ملاحظات:**
1. Le choix de cette méthode n'a de sens que si l'intégrale figurant dans le membre droit de la formule (0.1) : $\int U'.V$ est plus facile à calculer que l'intégrale figurant dans le membre gauche : $\int U.V'$.	1- اختيار هذه الطريقة لن يكون له أي معنى إلا في حالة ما كان التكامل الذي يظهر في الطرف الأيمن من العلاقة (0.1) $\int U'.V$ أسهل للحساب من التكامل الذي يظهر في الطرف الأيسر من العلاقة (0.1) يعني $\int U.V'$
2- Le choix des fonctions U et V doit être judicieux et ce n'est que par la pratique des exercices que l'on pourra plus facilement faire ce choix.	2- اختيار الدالتين U و V يجب أن يكون اختيارا حكيما، وفقط من خلال ممارسة التمارين يمكننا جعل هذا الاختيار سهل.

Exemple : Calculer $\int x \arctan x dx$ par la méthode d'intégration par partie.

On procède comme suit :

1ière étape : Choix des fonctions U et V

Comme **la dérivée** de la fonction $x \longmapsto \arctan x$ est facile à calculer et **la primitive** de la fonction $x \longmapsto x$ est connue, alors, posons :

$$U = \arctan x, V' = x$$

Donc,

$$U' = \frac{1}{1+x^2}, V = \frac{x^2}{2}$$

2ème étape : Application de la loi d'intégration par partie

$$\begin{aligned}
\int x \arctan x dx &= \int U \cdot V' \\
&= U \cdot V - \int U' \cdot V \\
&= (\arctan x) \cdot (\frac{x^2}{2}) + C_1 - \int \frac{1}{(1+x^2)} \cdot \frac{x^2}{2} dx \\
&= \frac{x^2}{2} \arctan x + C_1 - \frac{1}{2} \int \frac{x^2}{1+x^2} dx.
\end{aligned}$$

Remarquons que l'intégrale $\int U' \cdot V = \frac{1}{2} \int \frac{x^2}{1+x^2} dx$ est **plus facile à calculer que** $\int U \cdot V' = \int x \arctan x dx$. Alors, notre choix est judicieux (c'est le bon choix, donc on est dans le bon chemin).
Par suite,

$$\begin{aligned} \int x \arctan x dx &= \frac{x^2}{2} \arctan x + C_1 - \frac{1}{2} \int \frac{x^2}{1+x^2} dx \\ &= \frac{x^2}{2} \arctan x + C_1 - \frac{1}{2} \int \frac{x^2+1-1}{1+x^2} dx \\ &= \frac{x^2}{2} \arctan x + C_1 - \frac{1}{2} \Big(\int dx - \int \frac{dx}{1+x^2} \Big) \\ &= \frac{x^2}{2} \arctan x + C_1 - \frac{1}{2} \Big(x + C_2 - \arctan x + C_3 \Big) \end{aligned}$$

Finalement, on déduit que :

$$\int x \arctan x dx = \frac{1}{2}(x^2+1) \arctan x - \frac{x}{2} + C$$

4.1 Solution de l'exercice 3

Calculons par la méthode d'intégration par partie les intégrales suivantes :

1. $\int x^n lnx dx (n \neq 1)$

   Étape1 : Choix des fonctions U et V.
   Posons :

   $$U = lnx, V' = x^n$$

   Donc,

   $$U' = \frac{1}{x}, V = \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

   Étape2 : Application de la loi d'intégration par partie.
   Par suite,

   $$\begin{aligned} \int x^n lnx dx &= \int UV' \\ &= UV - \int U'V \\ &= \frac{x^{n+1}}{n+1} lnx + C_1 - \int \frac{1}{x} \frac{x^{n+1}}{n+1} dx \\ &= \frac{x^{n+1}}{n+1} lnx + C_1 - \frac{1}{n+1} \int x^n dx \end{aligned}$$

   Remarquons que : $\int U'V = \int x^n dx$ **est plus facile à calculer que :** $\int UV' = \int x^n \ln dx$. Donc, **on est dans le bon chemin**. D'où,

   $$\int x^n lnx dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} lnx + C_1 - \Big[\frac{1}{n+1} \frac{x^{n+1}}{n+1} + C_2 \Big]$$

   Par conséquent :

   $$\int x^n lnx dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} (lnx - \frac{1}{n+1}) + C.$$

2. $\displaystyle\int \arccos x dx$:

Étape1 : Choix des fonctions U et V'.
Posons :

$$U = \arccos x, V' = 1$$

Donc,

$$U' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, V = x$$

Étape2 : Application de la loi d'intégration par partie.
Par suite,

$$\begin{aligned}
\int \arccos x dx &= \int UV' \\
&= UV - \int U'V \\
&= x\arccos x + C_1 - \int -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx \\
&= x\arccos x + C_1 + \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx \\
&= x\arccos x + C_1 + \int x(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}dx.
\end{aligned}$$

Remarquons que : $\displaystyle\int x(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$ **est plus facile à calculer que :** $\displaystyle\int \arccos x dx$. Donc, **on est dans le bon chemin.**
Calculons l'intégrale irrationnelle : $\int x(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}dx$:

On constate que : $\int x(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}dx$ est de la forme : $\int x^m(a+bx^n)^p dx$ tel que : $m = 1,\ a = 1, b = -1,$ $n = 2, p = -\frac{1}{2}$.
Comme $p = -\frac{1}{2}$ **est fractionnaire**, alors, on est dans **le deuxième cas de la forme III (voir le paragraphe d'intégration des fonctions irrationnelles exo 2 et 5)**. Pour cela, on effectue le changement de variable suivant :

$$z^2 = 1 - x^2, 2zdz = -2xdx, xdx = -zdz$$

Ce qui implique que :

$$\begin{aligned}
\int x(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}dx &= \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx \\
&= \int \frac{-zdz}{z} \\
&= -\int dz \\
&= -z + C_2 \\
&= -\sqrt{1-x^2} + C_2.
\end{aligned}$$

En conséquent,

$$\int \arccos x dx = x\arccos x + -\sqrt{1-x^2} + C$$

3. $\int \arctan \sqrt{x} dx$:

On rappelle que si $I \subset \mathbb{R}$, f est dérivable sur I et g est dérivable sur $f(I)$ alors, la fonction composée $g \circ f$ est dérivable sur I et

$$(g \circ f)'(x) = f'(x)g'(f(x)).$$

Étape1 : Choix des fonctions U et V'.
Posons :

$$U = \arctan \sqrt{x}, V' = 1$$

Donc,

$$U' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{1+x} = \frac{1}{4} \frac{1}{x+x^2}, V = x$$

Étape2 : Application de la loi d'intégration par partie.
Par suite,

$$\begin{aligned}
\int \arctan \sqrt{x} dx &= \int UV' \\
&= UV - \int U'V \\
&= x \arctan \sqrt{x} - \int \frac{1}{4} \frac{x}{x+x^2} dx \\
&= x \arctan \sqrt{x} - \frac{1}{4} \int \frac{1}{1+x} dx
\end{aligned}$$

Remarquons que : $\int \frac{1}{1+x} dx$ **est plus facile à calculer que :** $\int \arctan \sqrt{x} dx$. Donc, **on est dans le bon chemin.**
D'où,

$$\int \arctan \sqrt{x} dx = x \arctan \sqrt{x} - \frac{1}{4} \ln|1+x| + C$$

4. $\int x \cos^2 x dx$:

Remarquons tout d'abord que cette intégrale peut être exprimée comme suit :

$$\begin{aligned}
\int x \cos^2 x dx &= \int x(\frac{\cos(2x)+1}{2}) \\
&= \frac{1}{2} \int [x + xcos(2x)] dx \\
&= \frac{1}{2} \int x dx + \frac{1}{2} \int x \cos(2x) dx \\
&= \frac{1}{4} x^2 + C_1 + \frac{1}{2} \int x \cos(2x) dx.
\end{aligned}$$

Maintenant, **calculons par la méthode d'intégration par partie :** $\int x \cos(2x) dx$.

Étape1 : Choix des fonctions U et V'.
Posons :

$$U = x, V' = \cos(2x) \text{ donc } U' = 1, V = \frac{1}{2} \sin(2x)$$

Étape2 : Application de la loi d'intégration par partie.
Il vient que :

$$\begin{aligned}\int x\cos(2x)dx &= \int UV' \\ &= UV - \int U'V \\ &= \frac{1}{2}x\sin(2x) - \frac{1}{2}\int \sin(2x)dx\end{aligned}$$

Remarquons que : $\int \sin(2x)dx$ **est plus facile à calculer que :** $\int x\cos(2x)dx$. Donc, **on est dans le bon chemin.**
D'où,

$$\int x\cos(2x)dx = \frac{1}{2}x\sin(2x) + \frac{1}{4}\cos(2x) + C_2$$

En remplaçant la valeur de $\int x\cos(2x)dx$ dans l'intégrale initiale, on trouve :

$$\int x\cos^2 x dx = \frac{1}{4}x^2 + C_1 + \frac{1}{4}x\sin(2x) + \frac{1}{8}\cos(2x) + C_2$$

Finalement, on déduit que :

$$\int x\cos^2 x dx = \frac{1}{4}[x^2 + x\sin(2x) + \frac{1}{2}\cos(2x)] + C$$

5 Rappel sur la méthode d'intégration d'une classe de fonctions trigonométriques

Méthode d'intégration d'une classe de fonctions trigonométriques :

$$\int \mathcal{R}(\sin x, \cos x, \tan x)dx$$

Pour ce type d'intégrale on éffectue le changement de variable suivant :

$$t = \tan\frac{x}{2} \Leftrightarrow x = 2\arctan t$$

Dans ce cas, on a :

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2} \quad , \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$\tan x = \frac{2t}{1-t^2} \quad , \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2}$$

En remplaçant ces expressions dans l'intégrale, on obtient :

$$\int \mathcal{R}\Big(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1-t^2}\Big)\frac{2dt}{1+t^2} = \int \mathcal{F}(t)dt$$

où $\mathcal{F}$ est une fonction rationnelle en t.
c-à-d le changement de variable effectué permet de transformer l'intégrale trigonométrique à une intégrale rationnelle.

Remarque :

La méthode générale établie pour ce type d'intégrale peut mener à des calculs parfois difficiles ou trés longs (voir l'éxemple2). Dans ce cas, il est préférable de choisir l'un parmi les changements de variable suivants : $t = \sin x$, $t = \cos x$, ou $t = \tan x$.

Exemple 1 : Calculer $\int \frac{dx}{1+\cos x}$:
On effectue le changement de variable :

$$t = \tan\frac{x}{2},$$

Donc :

$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \quad , \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2}.$$

Par suite,

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{1+\cos x} &= \int \frac{2dt}{1+t^2} \times \frac{1}{1+\frac{1-t^2}{1+t^2}}\\ &= \int \frac{2dt}{1+t^2} \times \frac{1+t^2}{2}\\ &= \int dt\\ &= t + C.\end{aligned}$$

D'où,

$$\int \frac{dx}{1+\cos x} = \tan\frac{x}{2} + C.$$

Exemple 2 : Calculer $\int \frac{\sin x}{\sqrt[3]{\cos^4 x}}dx$
On effectue le changement de variable :
$t = \cos x$, donc $dt = -\sin x dx$

$$\begin{aligned}\int \frac{\sin x}{\sqrt[3]{\cos^4 x}}dx &= \int \frac{-dt}{t^{-\frac{4}{3}}}\\ &= -\int t^{-\frac{4}{3}}dt\\ &= -(-3)t^{-\frac{1}{3}} + C\\ &= 3t^{-\frac{1}{3}} + C\\ &= \frac{3}{\sqrt[3]{t}} + C.\end{aligned}$$

D'où

$$\int \frac{\sin x}{\sqrt[3]{\cos^4 x}}dx = \frac{3}{\sqrt[3]{\cos x}} + C.$$

Remarque :
Si on éffectue le changement de variable $t = \tan x$, l'intégrale ci-dessus devient comme suit : $\int \frac{\sin x}{\sqrt[3]{\cos^4 x}}dx = \int \frac{4tdt}{(1-t^2)^{\frac{4}{3}}(1+t^2)^{\frac{2}{3}}}$. Donc, par comparaison par l'intégrale obtenue par le changement de variable $t = \cos x$, cette intégrale est difficile à calculer que $-\int t^{-\frac{4}{3}}dt$.

5.1 Solution de l'exercice 6

Calculons les intégrales suivantes en indiquant la méthode utilisée :

1. Calculons $\int x\sin x\cos x dx$:($2^{ème}$ Question de cet exercice) **en utilisant la méthode d'intégration par partie**

   Tout d'abord, remarquons que :

   $$\int x\sin x\cos x dx = \frac{1}{2}\int x\sin(2x)dx.$$

   Étape1 : Choix des fonctions U et V'. Posons :

   $$U = x, V' = \sin(2x), \text{ donc } U' = 1, V = -\frac{1}{2}\cos(2x).$$

   Étape2 : Application de la loi d'intégration par partie.

$$\begin{aligned}
\int x\sin(2x)dx &= \int UV' \\
&= UV - \int U'V \\
&= -\frac{1}{2}x\cos(2x) - \int -\frac{1}{2}\cos(2x)dx \\
&= -\frac{1}{2}x\cos(2x) + \frac{1}{2}\int \cos(2x)dx
\end{aligned}$$

Remarquons que : $\int \cos(2x)dx$ **est plus facile à calculer que :** $\int x\sin(2x)dx$. Donc, **on est dans le bon chemin.**

Alors,

$$\begin{aligned}
\int x\sin(2x)dx &= -\frac{1}{2}x\cos(2x) + \frac{1}{2}\frac{1}{2}\sin(2x) + C \\
&= \frac{1}{2}[-x\cos(2x) + \frac{1}{2}\sin(2x)] + C.
\end{aligned}$$

Par conséquent :

$$\int x\sin x\cos x dx = \frac{1}{4}[-x\cos(2x) + \frac{1}{2}\sin(2x)] + C$$

2. Calculons $\int (x+1)\sqrt{x^2+2x}dx$:(c'est la $1^{ère}$ Question de cet exercice)

Tout d'abord, remarquons que :

$$\begin{aligned}
\int (x+1)\sqrt{x^2+2x}dx &= \int x\sqrt{x(x+2)}dx + \int \sqrt{x(x+2)}dx \\
&= \int x^{\frac{3}{2}}(x+2)^{\frac{1}{2}}dx + \int x^{\frac{1}{2}}(x+2)^{\frac{1}{2}}dx.
\end{aligned}$$

Posons :

$$I_1 = \int x^{\frac{3}{2}}(x+2)^{\frac{1}{2}}dx,\ I_2 = \int x^{\frac{1}{2}}(x+2)^{\frac{1}{2}}dx$$

Calculons les séparément **en utilisant la méthode d'intégration des fonctions irrationnelles**.

Calculons $I_1 = \int x^{\frac{3}{2}}(x+2)^{\frac{1}{2}}dx$

Cette intégrale est de la **forme** : $\int x^m(a+bx^n)^p dx$, avec $m=\frac{3}{2},\ a=2,\ b=1,\ n=1,\ p=\frac{1}{2}$.

Comme $\frac{m+1}{n} = \frac{\frac{3}{2}+1}{1} = \frac{5}{2}$ et $p=\frac{1}{2}$ **sont fractionnaires**, ainsi $\frac{m+1}{n}+p = 3 \in \mathbb{Z}$, alors, on est dans **le troisième cas de la forme III (voir le paragraphe de l'intégration des fonctions irrationnelles exo2 et 5)**. Pour cela, on effectue le changement de variable suivant :

$$z^2 = \frac{x+2}{x} = 1 + \frac{2}{x}$$

Alors,

$$2zdz = -\frac{2}{x^2}dx, zdz = -\frac{dx}{x^2}, z^2-1 = \frac{2}{x}, x = \frac{2}{z^2-1}$$

Ce qui donne :

$$\begin{aligned} I_1 &= \underbrace{\int x^{\frac{3}{2}}(x+2)^{\frac{1}{2}}dx}_{\text{intégrale irrationnelle}} \\ &= -\int x^{\frac{3}{2}}\sqrt{x}zx^2zdz \\ &= -\int x^4z^2dz \\ &= -\int \frac{16}{(z^2-1)^4}z^2dz \\ &= -16\underbrace{\int \frac{z^2}{(z^2-1)^4}dz}_{\text{intégrale rationnelle}} \end{aligned}$$

Calculons l'intégrale rationnelle : $\int \frac{z^2}{(z^2-1)^4}dz$

On peut écrire :

$$\begin{aligned} \frac{z^2}{(z^2-1)^4} &= \frac{z^2-1+1}{(z^2-1)^4} \\ &= \frac{z^2-1}{(z^2-1)^4}+\frac{1}{(z^2-1)^4} \\ &= \frac{1}{(z^2-1)^3}+\frac{1}{(z^2-1)^4} \end{aligned}$$

En intégrant, on obtient :

$$\int \frac{z^2}{(z^2-1)^4}dx = \int \frac{1}{(z^2-1)^3}dz + \int \frac{1}{(z^2-1)^4}dz$$

Posons :

$$J_1 = \int \frac{1}{(z^2-1)^3}dz, \quad J_2 = \int \frac{1}{(z^2-1)^4}dz.$$

Pour calculer J_1, et J_2, **il faut tout d'abord calculer** $J = \int \frac{1}{(z^2-1)^2}dz$. Pour cela, posons :

$$J_0 = \int \frac{1}{(z^2-1)}dz$$

Calculons J_0 par **la méthode d'intégration par partie** : Posons :

$$U = \frac{1}{z^2-1}, V' = 1, \text{ donc } U' = -\frac{2z}{(z^2-1)^2}, V = z$$

Alors,

$$\begin{aligned} J_0 &= \int UV' = UV - \int U'V \\ &= \frac{z}{z^2-1} - \int \frac{-2z}{(z^2-1)^2} z dz \\ &= \frac{z}{z^2-1} + 2\int \frac{z^2}{(z^2-1)^2} dz \\ &= \frac{z}{z^2-1} + 2\int \frac{z^2-1+1}{(z^2-1)^2} dz \\ &= \frac{z}{z^2-1} + 2\int \frac{1}{z^2-1} dz + 2\int \frac{1}{(z^2-1)^2} dz \end{aligned}$$

Par suite,

$$J_0 = \frac{z}{z^2-1} + 2J_0 + 2J$$

D'où :

$$J = \frac{1}{2}[-\frac{z}{z^2-1} - J_0]$$

avec $J_0 = \frac{1}{2}\ln|\frac{z-1}{z+1}| + C_1$. (il suffit d'utiliser la méthode des fonctions rationnelles)
Alors,

$$J = -\frac{z}{2(z^2-1)} - \frac{1}{4}\ln|\frac{z-1}{z+1}| + C$$

Calculons $J_1 = \int \frac{dz}{(z^2-1)^3}$:

Une autre fois, on rappelle que : $J = \int \frac{dz}{(z^2-1)^2}$et on le Calcule par la méthode d'intégration par partie.

Posons : $U = \frac{1}{(z^2-1)^2}$, $\quad V' = 1$ donc, $U' = -\frac{4z}{(z^2-1)^3}$, $V = z$, alors

$$\begin{aligned} J &= \frac{z}{(z^2-1)^2} - \int -\frac{4z}{(z^2-1)^3} z dz \\ &= \frac{z}{(z^2-1)^2} + 4\int \frac{z^2}{(z^2-1)^3} dz \\ &= \frac{z}{(z^2-1)^2} + 4\int \frac{z^2-1+1}{(z^2-1)^3} dz \\ &= \frac{z}{(z^2-1)^2} + 4\int \frac{1}{(z^2-1)^2} dz + 4\int \frac{1}{(z^2-1)^3} dz \end{aligned}$$

D'où, $J = \frac{z}{(z^2-1)^2} + 4J + 4J_1$.

Par suite, $J_1 = \frac{1}{4}[-3J - \frac{z}{(z^2-1)^2}]$, avec $J = -\frac{z}{2(z^2-1)} - \frac{1}{4}\ln|\frac{z-1}{z+1}| + C$.

En conséquence

$$J_1 = \frac{1}{8}\frac{-5z+3z^3}{(z^2-1)^2} + \frac{3}{16}\ln|\frac{z-1}{z+1}| + C.$$

Calculons $J_2 = \int \frac{dz}{(z^2-1)^4}$

On procède comme précédemment, on pose : $J_1 = \int \frac{dz}{(z^2-1)^3}$ et on le calcule par la méthode d'intégration par partie.

Posons :

$$U = \frac{1}{(z^2-1)^3}, V' = 1 \text{ donc, } U' = -\frac{6z}{(z^2-1)^4}, V = z$$

$$\begin{aligned} J_1 &= \int UV' = UV - \int U'V \\ &= \frac{z}{(z^2-1)^3} - \int -\frac{6z}{(z^2-1)^4} z dz \\ &= \frac{z}{(z^2-1)^3} + 6\int \frac{z^2}{(z^2-1)^4} dz \\ &= \frac{z}{(z^2-1)^3} + 6\int \frac{z^2-1+1}{(z^2-1)^4} dz \end{aligned}$$

D'où,

$$J_1 = \frac{z}{(z^2-1)^3} + 6[\int \frac{1}{(z^2-1)^3} dz + \int \frac{1}{(z^2-1)^4} dz]$$

Ce qui implique que : $J_1 = \dfrac{z}{(z^2-1)^3} + 6J_1 + 6J_2$.

Par suite, $J_2 = \dfrac{1}{6}[-5J_1 - \dfrac{z}{(z^2-1)^3}]$, avec $J_1 = \dfrac{1}{8}\dfrac{-5z+3z^3}{(z^2-1)^2} + \dfrac{3}{16}\ln|\dfrac{z-1}{z+1}| + C$.

En conséquence,

$$J_2 = \frac{-15z^5 + 40z^3 - 33z}{48(z^2-1)^3} + \frac{5}{32}\ln|\frac{z-1}{z+1}| + C.$$

Donc,

$$\begin{aligned} I_1 &= \int x^{\frac{3}{2}}(x+1)^{\frac{1}{2}} dx \\ &= -16[J_1 + J_2] \\ &= -16\frac{3z^5 - 8z^3 - 3z}{48(z^2-1)^3} + \frac{1}{32}\ln|\frac{z-1}{z+1}| + C \end{aligned}$$

On déduit alors que :

$$I_1 = \frac{-3z^5 + 8z^3 + 3z}{3(z^2-1)^3} - \frac{1}{2}\ln|\frac{z-1}{z+1}| + C$$

Calculons $I_2 = \int x^{\frac{1}{2}}(x+2)^{\frac{1}{2}} dx$

Remarquons que I_2 est de **la forme** $\int x^m(a+bx^n)^p dx$, avec $m = \frac{1}{2},\ a = 2,\ b = 1,\ n = 1,\ p = \dfrac{1}{2}$.

Comme $\dfrac{m+1}{n} = \dfrac{\frac{1}{2}+1}{1} = \dfrac{3}{2}$ **et** $p = \frac{1}{2}$ **sont fractionnaires et** $\dfrac{m+1}{n} + p = \dfrac{3}{2} + \dfrac{1}{2} = 2 \in \mathbb{Z}$**, alors, on est dans le troisième cas de la forme III (voir le paragraphe de l'intégration des fonctions irrationnelles exo2 et 5)** . Pour cela, on effectue le changement de variable suivant :

$$z^2 = \frac{x+2}{x} = 1 + \frac{2}{x}.$$

Donc,

$$2z\ dz = -\frac{2}{x^2}dx, \quad z\ dz = -\frac{dx}{x^2}, x = \frac{2}{z^2-1}$$

Ce qui implique que :

$$\begin{aligned}
I_2 &= \underbrace{\int x^{\frac{1}{2}}(x+2)^{\frac{1}{2}}dx}_{\textbf{intégrale irrationnelle}}, \\
&= -\int x^{\frac{1}{2}}\sqrt{x}zx^2zdz, \\
&= -\int x^3z^2dz, \\
&= -8\underbrace{\int \frac{z^2}{(z^2-1)^3}dz}_{\textbf{intégrale rationnelle}}
\end{aligned}$$

Calculons l'intégrale rationnelle $\int \frac{z^2}{(z^2-1)^3}dz$

Remarquons que :

$$\begin{aligned}
\frac{z^2}{(z^2-1)^3} &= \frac{z^2-1+1}{(z^2-1)^3} \\
&= \frac{z^2-1}{(z^2-1)^3} + \frac{1}{(z^2-1)^3} \\
&= \frac{1}{(z^2-1)^2} + \frac{1}{(z^2-1)^3}
\end{aligned}$$

Ce qui implique que :

$$\int \frac{z^2}{(z^2-1)^3}dz = \int \frac{1}{(z^2-1)^2}dz + \int \frac{1}{(z^2-1)^3}dz$$

D'après ce qui précède, on a :

$$\int \frac{1}{(z^2-1)^2}dz = -\frac{z}{2(z^2-1)} - \frac{1}{4}\ln|\frac{z-1}{z+1}| + C$$

et

$$\int \frac{1}{(z^2-1)^3}dz = \frac{1}{8}\frac{-5z+3z^3}{(z^2-1)^2} + \frac{3}{16}\ln|\frac{z-1}{z+1}| + C.$$

Alors,

$$\begin{aligned}
\int \frac{z^2}{(z^2-1)^3}dz &= [-\frac{z}{2(z^2-1)} - \frac{1}{4}\ln|\frac{z-1}{z+1}| + C] + [\frac{1}{8}\frac{-5z+3z^3}{(z^2-1)^2} + \frac{3}{16}\ln|\frac{z-1}{z+1}| + C] \\
&= -\frac{z^3+z}{8(z^2-1)^2} - \frac{1}{16}\ln|\frac{z-1}{z+1}| + C
\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}
I_2 &= \int x^{\frac{1}{2}}(x+2)^{\frac{1}{2}}dx \\
&= -8\int \frac{z^2}{(z^2-1)^3}dz \\
&= -8[-\frac{z^3+z}{8(z^2-1)^2} - \frac{1}{16}\ln|\frac{z-1}{z+1}| + C] \\
&= \frac{z^3+z}{(z^2-1)^2} + \frac{1}{2}\ln|\frac{z-1}{z+1}| + C, \text{ tel que : } z = \sqrt{\frac{2+x}{x}}
\end{aligned}$$

Finalement, on déduit que :

$$\int (x+1)\sqrt{x^2+2x}dx = I_1 + I_2.$$

3. Calculons $\int \frac{2x^3+4x^2+x+2}{(x-1)^2(x^2+x+1)}dx$($5^{ème}$ Question de cet exercice) **en utilisant la méthode d'intégration des fonctions rationnelles**

Tout d'abord, remarquons que la fraction $\frac{2x^3+4x^2+x+2}{(x-1)^2(x^2+x+1)}$ est **régulière**, de plus, le dénominateur admet une racine réelle double qui est 1 et deux racines complexes simples qui sont : $-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ et $-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$, alors, d'après **le théorème fondamental de la décomposition**, la fraction ci-dessus se décompose en **éléments simples de type I, II et III** comme suit :

$$\frac{2x^3+4x^2+x+2}{(x-1)^2(x^2+x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{Mx+N}{x^2+x+1}$$

Par la méthode des coefficients indéterminés, on obtient :

$$A = 2,\ B = 1,\ M = 0,\ N = 3$$

Par suite,

$$\begin{aligned}\int \frac{2x^3+4x^2+x+2}{(x-1)^2(x^2+x+1)} &= 2\int \frac{1}{x-1}dx + \int \frac{1}{(x-1)^2}dx + 3\underbrace{\int \frac{1}{x^2+x+1}dx}_{\text{intégrale de type 3}}, \\ &= 2\ln|x-1| + C_1 - \frac{1}{x-1} + C_2 + 3\int \frac{dx}{x^2+x+1}.\end{aligned}$$

Calculons l'intégrale rationnelle de type 3 : $\int \frac{dx}{x^2+x+1}$

Remarquons que cette intégrale est de **la forme** $\int \frac{dx}{x^2+px+q}$ avec $p = q = 1$.

On a :

$$\begin{aligned}x^2+px+q &= x^2+x+1 \\ &= (x+\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4} \\ &= (x+\frac{1}{2})^2 + (\frac{\sqrt{3}}{2})^2\end{aligned}$$

Effectuons le changement de variable suivant :

$$t = x + \frac{p}{2} \text{ c'-à-d : } t = x + \frac{1}{2} \text{ donc } dt = dx \tag{5.1}$$

En remplaçant ces expressions dans l'intégrale ci-dessus, on trouve :

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{x^2+x+1} &= \int \frac{dx}{(x+\frac{1}{2})^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2} \\
&= \int \frac{dx}{t^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2} \\
&= \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan(\frac{2}{\sqrt{3}}t)+C_3 \\
&= \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan(\frac{2}{\sqrt{3}}(x+\frac{1}{2}))+C_3 \\
&= \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan(\frac{2}{\sqrt{3}}x+\frac{\sqrt{3}}{3}))+C_3.
\end{aligned}$$

Alors, on déduit que :

$$\int \frac{2x^3+4x^2+x+2}{(x-1)^2(x^2+x+1)}dx = 2\ln|x-1| - \frac{1}{x-1} + 2\sqrt{3}\arctan(\frac{2}{\sqrt{3}}x+\frac{\sqrt{3}}{3})+C.$$

4. Calculons $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$: (la $3^{ème}$ Question de cet exercice) **en utilisant la méthode du changement de variable**

On effectue **le changement de variable** suivant :

$$t = e^{\sqrt{x}}$$

Donc,

$$dt = \frac{1}{2\sqrt{x}}e^{\sqrt{x}}dx, 2\frac{dt}{t} = \frac{dx}{\sqrt{x}}$$

Par suite,

$$\begin{aligned}
\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx &= \int \frac{t\ 2dt}{t}, \\
&= \int 2dt, \\
&= 2t+C
\end{aligned}$$

En conséquence,

$$\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx = 2e^{\sqrt{x}}+C$$

5. Calculons $\int \frac{\ln(\cos(x))}{\cos^2(x)}dx$:(La $4^{ème}$ Question de cet exercice) **en utilisant la méthode d'intégration par partie**

Étape1 : Choix des fonctions U et V'

Posons :

$$U = \ln(\cos(x)),\ v' = \frac{1}{\cos^2(x)} \text{ alors}, U' = -\frac{\sin x}{\cos x} = -\tan(x),\ V = \tan(x)$$

Étape2 : Application de la loi d'intégration par partie.

$$\begin{aligned}
\int \frac{\ln(\cos(x))}{\cos^2(x)}dx &= \int UV' \\
&= UV - \int U'V \\
&= \ln(\cos(x))\tan(x) - \int (-\tan(x))\tan(x)dx \\
&= \ln(\cos(x))\tan(x) + \int \tan^2(x)dx
\end{aligned}$$

Calculons $\int \tan^2(x)dx$ par la méthode d'intégration des fonctions trigonométriques

Effectuons le changement de variable suivant :

$$t = \tan(\frac{x}{2})$$

Donc,

$$\tan(x) = \frac{2t}{1-t^2}, \ dx = \frac{2dt}{1+t^2}$$

Par suite,

$$\underbrace{\int \tan^2(x)dx}_{\text{intégrale trigonométrique}} = \int \left(\frac{2t}{1-t^2}\right)^2 \frac{2}{1+t^2}dt = 8\underbrace{\int \frac{t^2}{(1-t^2)^2(1+t^2)}dt}_{\text{intégrale rationnelle}}$$

Calculons l'intégrale rationnelle : $\int \frac{t^2}{(1-t^2)^2(1+t^2)}dt$:

$\frac{t^2}{(1-t^2)^2(1+t^2)}$ est une fraction **régulière**, de plus, le dénominateur admet deux racines réelles doubles qui sont -1 et 1, et deux racines complexes simples i et $-i$, alors, d'après **le théorème fondamental de la décomposition**, la fraction se décompose en **éléments simples de type I, II, III** comme suit :

$$\frac{t^2}{(1-t^2)^2(1+t^2)} = \frac{A}{1-t^2} + \frac{B}{(1-t^2)^2} + \frac{Mt+N}{1+t^2}$$

Par **la méthode des coefficients indéterminés**, on obtient :

$$A = \frac{1}{4}, B = -\frac{1}{2}, M = 0, \text{ et } N = \frac{1}{4}$$

Donc,

$$\begin{aligned}
\int \frac{t^2}{(1-t^2)^2(1+t^2)}dt &= \frac{1}{4}\int \frac{dt}{1-t^2} - \frac{1}{2}\int \frac{dt}{(1-t^2)^2} + \frac{1}{4}\int \frac{dt}{1+t^2} \\
&= -\frac{1}{4}\int \frac{dt}{-1+t^2} - \frac{1}{2}\int \frac{dt}{(-1+t^2)^2} + \frac{1}{4}\int \frac{dt}{1+t^2} \\
&\overset{voirQues1}{=} -\frac{1}{4}\left[\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + C_1\right] - \frac{1}{2}\left[-\frac{t}{2(t^2-1)} - \frac{1}{4}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + C_2\right] + \frac{1}{4}\arctan t + C_3
\end{aligned}$$

Par suite,

$$\int \frac{t^2}{(1-t^2)^2(1+t^2)}dt = \frac{1}{4}\left[\frac{t}{t^2-1} + \arctan t\right] + C_4$$

Alors,

$$\int \tan^2 x dx = \quad 8\Big(\frac{1}{4}\Big[\frac{t}{t^2-1} + \arctan t\Big] + C_4\Big) = \quad 2\Big[\frac{t}{t^2-1} + \arctan t\Big] + C$$

Finalement, on déduit que :

$$\int \frac{\ln \cos x}{\cos^2 x} dx = \ln \cos \tan x + 2\Big[\frac{t}{t^2-1} + \arctan t\Big] + C$$

6. Calculons $\int \frac{2x^5 - 3x^2}{1+3x^3-x^6} dx$: ($6^{ème}$ Question de cet exercice) **en utilisant la méthode du changement de variable**

Posons : $U = -x^6+3x^3+1$, donc $U' = -6x^5+9x^2 = -3(2x^5-3x^2)$, d'où $-\frac{1}{3}U' = 2x^5-3x^2$.
En remplaçant ces expressions dans l'intégrale initiale, on obtient :

$$\begin{aligned} \int \frac{2x^5 - 3x^2}{1+3x^3-x^6} dx &= \int \frac{-\frac{1}{3}U'}{U} dx \\ &= -\frac{1}{3}\int \frac{U'}{U} dx \\ &= -\frac{1}{3}\ln|U| + C \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\int \frac{2x^5 - 3x^2}{1+3x^3-x^6} dx = -\frac{1}{3}\ln|-x^6+3x^3+1| + C$$