Corrigé TD1

Exercice 1:

a) Soient A, B et C trois variables booléennes. Pour chaque exemple donné ci-dessous, utiliser une table de vérité pour démontrer l'égalité entre deux expressions logiques.

1. $\overline{A}+\overline{B} = \overline{A.B}$

A	B	$\overline{A}$	$\overline{B}$	A.B	$\overline{A}+\overline{B}$	$\overline{A.B}$
0	0	1	1	0	1	1
0	1	1	0	0	1	1
1	0	0	1	0	1	1
1	1	0	0	1	0	0

2. $A+\overline{A}B = A+B$

A	B	$\overline{A}$	$\overline{A}.B$	$A+\overline{A}.B$	A+B
0	0	1	0	0	0
0	1	1	0	0	0
1	0	0	0	1	1
1	1	0	0	1	1

3. $(A+B).(\overline{A}.\overline{B}) = 0$

A	B	$\overline{A}$	$\overline{B}$	A+B	$\overline{A}.\overline{B}$	$(A+B)(\overline{A}.\overline{B})$
0	0	1	1	0	1	0
0	1	1	0	1	0	0
1	0	0	1	1	0	0
1	1	0	0	1	0	0

4. $A.C + A.\overline{C} + B.C + B.\overline{C} = A+B$

A	B	C	$\overline{C}$	A.C	$A.\overline{C}$	B.C	$B.\overline{C}$	$A.C + A.\overline{C} + B.C + B.\overline{C}$	A+B
0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
0	1	0	1	0	0	0	1	1	1
0	1	1	0	0	0	1	0	1	1
1	0	0	1	0	1	0	0	1	1
1	0	1	0	1	0	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	1	1
1	1	1	0	1	0	1	0	1	1

b) Représenter les deux expressions booléennes suivantes, en utilisant la table de vérité :

$S_1 = A + B.C$ $\quad$ $S_2 = (A+B).(A+C)$

Que remarquez-vous ? Que peut-on conclure ?

A	B	C	B.C	A+B	A+C	A+ B.C	(A+B).(A+C)
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	1	0	0
0	1	0	0	1	0	0	0
0	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	1	1
1	0	1	0	1	1	1	1
1	1	0	0	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1

On remarque que les deux expressions sont égales.

On peut conclure que c'est la distribution de '+' par rapport à '.'

Exercice 2:

Simplifier les expressions S_1, S_2, S_3 et S_4 en utilisant les propriétés de l'algèbre de Boole.

1. $S_1 = \overline{A}.B + A.\overline{B} + A.B$
   $= \overline{A}.B + A.(\overline{B} + B)$
   $= \overline{A}.B + A.1$
   $= \overline{A}.B + A$
   $= A + \overline{A}.B$
   $= A + B$
2. $S_2 = B + A.B + B.C + C$
   $= (1+A).B + (B+1).C$
   $= 1.B + 1.C$
   $= B + C$
3. $S_3 = (B + \overline{B}.A).C + A.B.\overline{C}$
   $= (B + A).C + A.B.\overline{C}$
   $= B.C + A.C + A.B.\overline{C}$
   $= B.C + A.(C + \overline{C}.B)$
   $= B.C + A.(C+B)$
   $= B.C + A.C + A.B$
4. $S_4 = (A+C).(A+\overline{B}).(A+\overline{C})$
   $= (A+C).(A+\overline{C}).(A+\overline{B})$
   $= (A.A + A.\overline{C} + A.C + C.\overline{C}).(A+\overline{B})$
   $= (A + A.\overline{C} + A.C + 0).(A+\overline{B})$
   $= (A + A.\overline{C} + A.C).(A+\overline{B})$
   $= A.(1+\overline{C}+C).(A+\overline{B})$
   $= A.1.(A+\overline{B})$
   $= A.(A+\overline{B})$
   $= A.A + A.\overline{B}$
   $= A + A.\overline{B}$
   $= A.(1+\overline{B})$
   $= A.1$
   $= A$

Exercice 3 :

1) Donner la première forme canonique des fonctions suivantes en utilisant la table de vérité :

a. $F_1(A, B, C) = (\bar{A} + \overline{B}).(B + \bar{C})$

A	B	C	$\bar{A}$	$\bar{B}$	$\bar{C}$	$\bar{A} + \bar{B}$	$B + \bar{C}$	$F_1(A, B, C)$	Mintermes
0	0	0	1	1	1	1	1	1	$\bar{A}.\bar{B}.\bar{C}$
0	0	1	1	1	0	1	0	0	
0	1	0	1	0	1	1	1	1	$\bar{A}.B.\bar{C}$
0	1	1	1	0	0	1	1	1	$\bar{A}.B.C$
1	0	0	0	1	1	1	1	1	$A.\bar{B}.\bar{C}$
1	0	1	0	1	0	1	0	0	
1	1	0	0	0	1	0	1	0	
1	1	1	0	0	0	0	1	0	

$F_1(A, B, C) = \bar{A}.\bar{B}.\bar{C} + \bar{A}.B.\bar{C} + \bar{A}.B.C + A.\bar{B}.\bar{C}$

b. $F_2(A,B,C,D) = A.\bar{C}.D + \bar{A}.B.\bar{D}$

A	B	C	D	$\bar{A}$	$\bar{C}$	$\bar{D}$	$A.\bar{C}.D$	$\bar{A}.B.\bar{D}$	$F_2(A,B,C,D)$	Mintermes
0	0	0	0	1	1	1	0	0	0	
0	0	0	1	1	1	0	0	0	0	
0	0	1	0	1	0	1	0	0	0	
0	0	1	1	1	0	0	0	0	0	
0	1	0	0	1	1	1	0	1	1	$\bar{A}.B.\bar{C}.\bar{D}$
0	1	0	1	1	1	0	0	0	0	
0	1	1	0	1	0	1	0	1	1	$\bar{A}.B.C.\bar{D}$
0	1	1	1	1	0	0	0	0	0	
1	0	0	0	0	1	1	0	0	0	
1	0	0	1	0	1	0	1	0	1	$A.\bar{B}.\bar{C}.D$
1	0	1	0	0	0	1	0	0	0	
1	0	1	1	0	0	0	0	0	0	
1	1	0	0	0	1	1	0	0	0	
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	$A.B.\bar{C}.D$
1	1	1	0	0	0	1	0	0	0	
1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	

$F_2(A,B,C,D) = \bar{A}.B.\bar{C}.\bar{D} + \bar{A}.B.C.\bar{D} + A.\bar{B}.\bar{C}.D + A.B.\bar{C}.D$

c. $F_3(A,B,C) = \sum(1,2,7)$.

Valeur décimale	A	B	C	$F_3(A,B,C)$	Mintermes
0	0	0	0	0	
1	0	0	1	1	$\bar{A}.\bar{B}.C$
2	0	1	0	1	$\bar{A}.B.\bar{C}$
3	0	1	1	0	
4	1	0	0	0	
5	1	0	1	0	
6	1	1	0	0	
7	1	1	1	1	$A.B.C$

$F_3(A,B,C) = \bar{A}.\bar{B}.C + \bar{A}.B.\bar{C} + A.B.C$

d. $F_4(A,B,C,D) = \sum(0,3,6,9,10,13)$.

Valeur décimale	A	B	C	D	$F_4(A,B,C,D)$	Mintermes
0	0	0	0	0	1	$\bar{A}.\bar{B}.\bar{C}.\bar{D}$
1	0	0	0	1	0	
2	0	0	1	0	0	
3	0	0	1	1	1	$\bar{A}.\bar{B}.C.D$
4	0	1	0	0	0	
5	0	1	0	1	0	
6	0	1	1	0	1	$\bar{A}.B.C.\bar{D}$
7	0	1	1	1	0	
8	1	0	0	0	0	
9	1	0	0	1	1	$A.\bar{B}.\bar{C}.D$
10	1	0	1	0	1	$A.\bar{B}.C.\bar{D}$
11	1	0	1	1	0	
12	1	1	0	0	0	
13	1	1	0	1	1	$A.B.\bar{C}.D$
14	1	1	1	0	0	
15	1	1	1	1	0	

$F_4(A,B,C,D) = \bar{A}.\bar{B}.\bar{C}.\bar{D} + \bar{A}.\bar{B}.C.D + \bar{A}.B.C.\bar{D} + A.\bar{B}.\bar{C}.D + A.\bar{B}.C.\bar{D} + A.B.\bar{C}.D$

2) Donner la deuxième forme canonique des fonctions suivantes en utilisant la table de vérité :

a. $H_1(A,B,C) = \bar{A}.B + \bar{B}.\bar{C} + A.B.\bar{C}$

A	B	C	$\bar{A}$	$\bar{B}$	$\bar{C}$	$\bar{A}.B$	$\bar{B}.\bar{C}$	$A.B.\bar{C}$	$H_1(A,B,C)$	Maxtermes
0	0	0	1	1	1	0	1	0	1	
0	0	1	1	1	0	0	0	0	0	$A + B + \bar{C}$
0	1	0	1	0	1	1	0	0	1	
0	1	1	1	0	0	1	0	0	1	
1	0	0	0	1	1	0	1	0	1	
1	0	1	0	1	0	0	0	0	0	$\bar{A} + B + \bar{C}$
1	1	0	0	0	1	0	0	1	1	
1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	$\bar{A} + \bar{B} + \bar{C}$

$H_1(A,B,C) = (A + B + \bar{C}).(\bar{A} + B + \bar{C}) + (\bar{A} + \bar{B} + \bar{C})$

b. $\mathrm{H}_2(\mathrm{A},\mathrm{B},\mathrm{C},\mathrm{D}) = \mathrm{A}.\mathrm{B}.\mathrm{C} + \bar{A}.\bar{B}.\mathrm{C} + \mathrm{B}.\bar{D} + \mathrm{A}.\mathrm{D}$

A	B	C	D	$\bar{A}$	$\bar{B}$	$\bar{D}$	$\mathrm{A}.\mathrm{B}.\mathrm{C}$	$\bar{A}.\bar{B}.\mathrm{C}$	$\mathrm{B}.\bar{D}$	$\mathrm{A}.\mathrm{D}$	$\mathrm{H}_2(\mathrm{A},\mathrm{B},\mathrm{C},\mathrm{D})$	Maxtermes
0	0	0	0	1	1	1	0	0	0	0	0	$A+B+C+D$
0	0	0	1	1	1	0	0	0	0	0	0	$A+B+C+\bar{D}$
0	0	1	0	1	1	1	0	1	0	0	1	
0	0	1	1	1	1	0	0	1	0	0	1	
0	1	0	0	1	0	1	0	0	1	0	1	
0	1	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	$A+\bar{B}+C+\bar{D}$
0	1	1	0	1	0	1	0	0	1	0	1	
0	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	$A+\bar{B}+\bar{C}+\bar{D}$
1	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	$\bar{A}+B+C+D$
1	0	0	1	0	1	0	0	0	0	1	1	
1	0	1	0	0	1	1	0	0	0	0	0	$\bar{A}+B+\bar{C}+D$
1	0	1	1	0	1	0	0	0	0	1	1	
1	1	0	0	0	0	1	0	0	1	0	1	
1	1	0	1	0	0	0	0	0	0	1	1	
1	1	1	0	0	0	1	1	0	1	0	1	
1	1	1	1	0	0	0	1	0	0	1	1	

$$\mathrm{H}_2(\mathrm{A},\mathrm{B},\mathrm{C},\mathrm{D}) = (A+B+C+D).(A+B+C+\bar{D}).(A+\bar{B}+C+\bar{D}).(A+\bar{B}+\bar{C}+\bar{D}).(\bar{A}+B+C+D).(\bar{A}+B+\bar{C}+D)$$

c. $\mathrm{H}_3(\mathrm{A},\mathrm{B},\mathrm{C}) = \prod(1,2,4,5,6)$.

Valeur décimale	A	B	C	$\mathrm{H}_3(\mathrm{A},\mathrm{B},\mathrm{C})$	Maxtermes
0	0	0	0	1	
1	0	0	1	0	$A+B+\bar{C}$
2	0	1	0	0	$A+\bar{B}+C$
3	0	1	1	1	
4	1	0	0	0	$\bar{A}+B+C$
5	1	0	1	0	$\bar{A}+B+\bar{C}$
6	1	1	0	0	$\bar{A}+\bar{B}+C$
7	1	1	1	1	

$$\mathrm{H}_3(\mathrm{A},\mathrm{B},\mathrm{C}) = (A+B+\bar{C}).(A+\bar{B}+C).(\bar{A}+B+C).(\bar{A}+B+\bar{C}).(\bar{A}+\bar{B}+C)$$

d. $H_4(A,B,C,D) = \prod(4,7,12,14,15)$.

Valeur décimale	A	B	C	D	$H_4(A,B,C,D)$	Maxtermes
0	0	0	0	0	1	
1	0	0	0	1	1	
2	0	0	1	0	1	
3	0	0	1	1	1	
4	0	1	0	0	0	$A+\bar{B}+C+D$
5	0	1	0	1	1	
6	0	1	1	0	1	
7	0	1	1	1	0	$A+\bar{B}+\bar{C}+\bar{D}$
8	1	0	0	0	1	
9	1	0	0	1	1	
10	1	0	1	0	1	
11	1	0	1	1	1	
12	1	1	0	0	0	$\bar{A}+\bar{B}+C+D$
13	1	1	0	1	1	
14	1	1	1	0	0	$\bar{A}+\bar{B}+\bar{C}+D$
15	1	1	1	1	0	$\bar{A}+\bar{B}+\bar{C}+\bar{D}$

$H_4(A,B,C,D) = (A+\bar{B}+C+D).(A+\bar{B}+\bar{C}+\bar{D}).(\bar{A}+\bar{B}+C+D).(\bar{A}+\bar{B}+\bar{C}+D).(\bar{A}+\bar{B}+\bar{C}+\bar{D})$

3) Soient les tables de vérité suivantes :

A	B	C	D	F(A,B,C,D)	Mintermes
0	0	0	0	0	
0	0	0	1	1	$\bar{A}.\bar{B}.\bar{C}.D$
0	0	1	0	0	
0	0	1	1	0	
0	1	0	0	0	
0	1	0	1	1	$\bar{A}.B.\bar{C}.D$
0	1	1	0	0	
0	1	1	1	0	
1	0	0	0	0	
1	0	0	1	1	$A.\bar{B}.\bar{C}.D$
1	0	1	0	0	
1	0	1	1	0	
1	1	0	0	0	
1	1	0	1	1	$A.B.\bar{C}.D$
1	1	1	0	0	
1	1	1	1	0	

1ère FC : $F(A,B,C,D) = \bar{A}.\bar{B}.\bar{C}.D + \bar{A}.B.\bar{C}.D + A.\bar{B}.\bar{C}.D + A.B.\bar{C}.D$

La simplification de la fonction F est $F(A,B,C,D) = \bar{C}.D$

Démonstration : $F(A,B,C,D) = \bar{A}.\bar{B}.\bar{C}.D + \bar{A}.B.\bar{C}.D + A.\bar{B}.\bar{C}.D + A.B.\bar{C}.D$

$$= \bar{C}.D.(\bar{A}.\bar{B} + \bar{A}.B + A.\bar{B} + A.B)$$

$$= \bar{C}.D.\big(\bar{A}.(\bar{B}+B) + A.(\bar{B}+B)\big)$$

$$= \bar{C}.D.(\bar{A}+A) = \bar{C}.D$$

A	B	C	H(A, B, C)	Maxtermes
0	0	0	0	$A+B+C$
0	0	1	0	$A+B+\bar{C}$
0	1	0	1	
0	1	1	1	
1	0	0	0	$\bar{A}+B+C$
1	0	1	0	$\bar{A}+B+\bar{C}$
1	1	0	1	
1	1	1	1	

2ème FC : $\mathrm{H(A,B,C)} = (A+B+C).(A+B+\bar{C}).(\bar{A}+B+C).(\bar{A}+B+\bar{C})$

La simplification de la fonction H est : $\mathrm{H(A,B,C)} = B$

Démonstration : $\mathrm{H(A,B,C)} = (A+B+C).(A+B+\bar{C}).(\bar{A}+B+C).(\bar{A}+B+\bar{C})$

$$= B + ((A+C).(A+\bar{C}).(\bar{A}+C).(\bar{A}+\bar{C}))$$

$$= B + ((A+(C.\bar{C})).(\bar{A}+(C.\bar{C})))$$

$$= B + (A.\bar{A}) = B$$

Exercice 4 :

1. Écrire sous la première forme canonique les fonctions définies par les propositions suivantes :

- **F(A,B,C)= 1** si et seulement si exactement deux des variables A, B, C prennent la valeur 1
- **F(A,B,C)= 1** si et seulement si les variables A, B, C prennent la valeur 1
- **F(A,B,C)= A+B.C**

2. Écrire sous la deuxième forme canonique les fonctions définies par les propositions suivantes :

- **F(A,B,C)= 0** si et seulement si exactement une des variables A, B, C prend la valeur 1
- **F(A,B,C)= 0** si et seulement si au moins deux des variables A, B, C prennent la valeur 0
- **F(A,B,C)= C.(B+A+C)**

Solution Exercice 4 :

1. La première forme canonique :

- **F(A,B,C)=** $\bar{A}.B.C + A.\bar{B}.C + A.B.\bar{C}$
- **F(A,B,C)=** $A.B.C$
- **F(A,B,C)=** $A+B.C$

= $A.1.1+B.C.1$ « Identité »

= $A.(B+\bar{B}).(C+\bar{C})+B.C.(A+\bar{A})$ « Complémentarité »

= $A.B.C + A.B.\bar{C} + A.\bar{B}.C + A.\bar{B}.\bar{C} + B.C.A + B.C.\bar{A}$ « Distributivité »

= $A.B.C + A.B.C + A.B.\bar{C} + A.\bar{B}.C + A.\bar{B}.\bar{C} + \bar{A}.B.C$ « Commutativité »

= $A.B.C + A.B.\bar{C} + A.\bar{B}.C + A.\bar{B}.\bar{C} + \bar{A}.B.C$ « Idempotence »

La deuxième forme canonique :

- **F(A,B,C)= (**$\bar{A}$+B+C) **.** (A+$\bar{B}$+C) **.** (A+B+$\bar{C}$)
- **F(A,B,C)= (**A+B+$\bar{C}$) **.** (A+$\bar{B}$+C) **.** ($\bar{A}$+B+C) **.** (A+B+C)
- **F(A,B,C)=** C**.**(B+A+C)

= (C+0+0)**.**(B+A+C) « Identité »

= (C+A.$\bar{A}$+B.$\bar{B}$)**.**(B+A+C) « Complémentarité »

= ((C+A+B)**.**(C+A+$\bar{B}$)**.**(C+$\bar{A}$+B)**.**(C+$\bar{A}$+$\bar{B}$)) **.**(B+A+C) « Distributivité »

= (C+A+B)**.**(C+A+$\bar{B}$)**.**(C+$\bar{A}$+B)**.**(C+$\bar{A}$+$\bar{B}$) **.**(B+A+C) « Associativité »

= (C+A+B)**.** (C+A+B)**.** (C+A+$\bar{B}$)**.**(C+$\bar{A}$+B)**.**(C+$\bar{A}$+$\bar{B}$) « Commutativité »

= (C+A+B)**.** (C+A+$\bar{B}$)**.**(C+$\bar{A}$+B) **.**(C+$\bar{A}$+$\bar{B}$) « Idempotence »

Exercice 5 : En utilisant les théorèmes de De Morgan :

1. Vérifier que les compléments des fonctions F1 et F2 :

- $F_1 = A\,.B + \bar{C}$
- $F_2 = (A + B\,.\;C)\,.\,(\,\bar{A}\,.B + C)$

Sont :

- $\overline{F_1} = (\bar{A} + \bar{B})\,.C$
- $\overline{F_2} = \bar{C} + \bar{A}\,.\;\bar{B}$

2. Exprimer le complément (l'inverse) de la fonction suivante :

- $F_3 = \bar{A}\,.\;\bar{C}\,.\bar{D} + A\,.D + \bar{A}\,.B.C + \bar{A}\,.\bar{B}.\bar{C}$

Solution Exo5 :

1. Vérifier que les compléments des fonctions F1 et F2 :

- $F_1 = A\,.B + \bar{C}$

$\overline{F_1} = \overline{A\,.B + \bar{C}}$

$\overline{F_1} = \overline{A\,.B}\,.\;\bar{\bar{C}}$

$\overline{F_1} = (\bar{A} + \bar{B})\,.\;C$

- $F_2 = (A + B\,.\;C)\,.\,(\,\bar{A}\,.B + C)$

$\overline{F_2} = \overline{(A + B\,.\;C)\,.\,(\,\bar{A}\,.B + C)}$

$\overline{F_2} = \overline{(A + B\,.\;C)} + \overline{(\,\bar{A}\,.B + C)}$

$\overline{F_2} = (\bar{A}\,.\;\overline{(B\,.\;C)}) + \left(\left(\overline{\bar{A}\,.B}\right).\bar{C}\right)$

$\overline{F_2} = (\bar{A}\,.\;(\bar{B} + \bar{C})) + \left((A + \bar{B})\,.\bar{C}\right)$

$\overline{F_2} = (\bar{A}\,.\;\bar{B}) + (\bar{A}\,.\;\bar{C}) + \;(A + \bar{B})\,.\bar{C}$

$\overline{F_2} = \bar{C}\,(A + \bar{A} + B)\; + \;(\bar{A}\,.\,\bar{B})$

$\overline{F_2} = \bar{C}\,(1 + B) + \bar{A}\,.\,\bar{B}$

$\overline{F_2} = \bar{C}\,(1) + \bar{A}\,.\,\bar{B}$

$\overline{F_2} = \bar{C}\; + \bar{A}\,.\,\bar{B}$

2. Exprimer le complément (l’inverse) de la fonction suivante :

- $F_3 = \bar{A}\,.\,\overline{C}\,.\,\overline{D} + A\,.\,D + \bar{A}\,.\,B.\,C + \bar{A}\,.\,\bar{B}.\,\bar{C}$

  $\overline{F_3} = \overline{\bar{A}\,.\,\overline{C}\,.\,\overline{D} + A\,.\,D + \bar{A}\,.\,B.\,C + \bar{A}\,.\,\bar{B}.\,\bar{C}}$

  $\overline{F_3} = \overline{\bar{A}\,.\,\overline{C}\,.\,\overline{D}}\,.\ \overline{A\,.\,D}\,.\ \overline{\bar{A}\,.\,B.\,C}\,.\overline{\bar{A}\,.\,\bar{B}.\,\bar{C}}$

  $\overline{F_3} = (A + C + D)\,.\ (\bar{A} + \overline{D}).(A + \bar{B} + \bar{C}).(A + B + C)$

  $\overline{F_3} =$ ………………………………..

  $\overline{F_3} = (A.\overline{D}) +\ (\bar{A}\,.\,B\,.\,\bar{C}\,.\,D) +\ (\bar{A}\,.\,\bar{B}\,.\,C) + (\bar{B}\,.\,C\,.\,\overline{D})$