République Algérienne Démocratique Et Populaire

Ministère de L'enseignement Supérieur et De La Recherche Scientifique

Université de Mustapha Ben Boulaid -Batna 2

Faculté de Mathématiques et informatique

Département du socle commun Mathématiques et Informatique

2020-2021

Première Année MI-À distance

Module : Analyse1

Fiche de révision2:

Les suites numériques

Dans la première partie de cette fiche, nous allons mettre le vocabulaire principal introduit dans ce chapitre et dans la 2ème partie, nous présentons un rappel sur les suites numériques avec des exemples illustratifs. La 3ème partie est consacrée pour des exercices d'applications.

Réalisée par :

Mme Belkacem .K,
Mme Merzougui .L,
et Mme Touil.A

Table des matières

Première partie

Interprétation en arabe de principaux termes Mathématiques introduit dans ce chapitre

Suite	متتالية
Numérique	عددية
Suite numérique	متتالية عددية
Terme	حد
Général	عام
Terme général	حد عام
Premier terme	الحد الأول
Rang	رتبة
Suite constante	متتالية ثابتة
Suite nulle	متتالية معدومة
Opérations algébriques sur les suites	العمليات الجبرية على المتتاليات
Positif	موجب
Strictement positif	موجب تماما
L'ensemble des valeurs de la suite U_n	مجموعة قيم المتتالية U_n
Suites bornées	متتالية محدودة
Suite majorée	متتالية محدودة من الأعلى
Suite minorée	متتالية محدودة من الأسفل
Suites monotones	متتاليات رتيبة
Suite croissante	متتالية متزايدة
Suite strictement croissante	متتالية متزايدة تماما
Suite décroissante	متتالية متناقصة
Suite constante	متتالية ثابتة
Suite stable	متتالية مستقرة
Suites convergentes	متتاليات متقاربة
Converge vers	تتقارب نحو
Lorsque n tend vers l'infini	لما n يؤول إلى ما لا نهاية
Limite	نهاية
Converge vers la limite	تتقارب نحو النهاية
Suite divergente	متتالية متباعدة
Formes indéterminées	حالات عدم التعيين
Divergence	التباعد
Critères de convergence	مقاييس التباعد
Théorème d'encadrement	نظرية الحصر
Les suites adjacentes	المتتاليات المتجاورة
Les suites extraites	المتتاليات المستخرجة
En fonction de	بدلالة

Deuxième partie

Rappel sur les suites numériques

1 Généralités et définitions

1.1 Suites

On rappelle les définitions concernant les suites réelles.

Définition 1.1. *Soit $E \neq \varnothing$. Toute fonction u définie de $\mathbb{N}$ vers E est appelée suite des éléments de E. C'est à dire*

$$\begin{aligned} u :& \mathbb{N} \longrightarrow E \\ & n \longrightarrow u(n). \end{aligned}$$

— *On note une telle application u_n .*
— *Le nombre u_n est appelée le terme général de la suite (u_n).*
— *La fonction u est notée par $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou simplement (u_n).*

Exemples 1.2.
1.

$$\begin{aligned} u :& \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R} \\ & n \longrightarrow u(n) = u_n = \frac{n}{n+1}. \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} u :& \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{R} \\ & n \longrightarrow u(n) = u_n = \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned} u :& \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R} \\ & n \longrightarrow u(n) = u_n = e^n. \end{aligned}$$

Définition 1.3. *Si $E = \mathbb{R}$, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est appelée* ***suite numérique****.*

Remarques 1.4.

1. *On appellera aussi suite les applications dont l'ensemble de départ est $\mathbb{N}$ privé de ses premiers élélments jusqu'à* ***certain rang*** *c'est à dire $(u_n)_{n\geq n_0}$ tel que $n_0 \in \mathbb{N}$.*

   Exemple 1.5. *La suite $\left(\dfrac{1}{n(n-1)}\right)$ est définie pour $n \geq n_0 = 2$.*

2. *Une suite peut être définie de trois façons diffŕentes :*
   (a) *Soit directement par une formule, en général une fonction f et on a pour $n \in \mathbb{N} : u(n) = f(n)$. C'est ce qu'on appelle* ***une formulation explicite de la suite.***
   Exemple 1.6. *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n = (-1)^n \cos(\frac{n\pi}{2})$, $u_n = \sin n$.*
   (b) *Soit donner une caractérisation* ***propriété*** *des termes de la suite (u_n).*
   Exemple 1.7. *$u_n = 0$ si n premier et $u_n = 1$ sinon. (u_n) représente la n-ème décimale du nombre π.*
   (c) *Soit en exprimant u_{n+1} en fonction du terme précédent u_n et en définissant une valeur initiale, comme par exemple :*
   Exemple 1.8. *On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ comme suit :*

$$\begin{cases} u_0 = a, \\ u_{n+1} = f(u_n). \end{cases}$$

   c'est ce on appelle ***une formulation par récurrence.***
   Exemple 1.9. *On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ comme suit :*

$$\begin{cases} u_0 = 2, \\ u_{n+1} = 3u_n + 2 \qquad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*. \end{cases}$$

Définition 1.10. *L'ensemble* $A = \{u_n;\ n \geq n_0\}$ *est appelé l'ensemble des valeurs de* (u_n).

Exemple 1.11. *On définit la suite* (u_n) *par :* $u_n = (-1)^n;\ \forall n \in \mathbb{N}$. *Alors, l'ensemble des valeurs de* (u_n) *est* $\{-1, 1\}$.

Définition 1.12.

1. *La suite numérique* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est* ***stable*** *si :* $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ *tel que* $\forall n \geq n_0, u_n = u_{n_0}$.

   Exemple 1.13. *On définit la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *par* $u_0 = -1,\ \forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = 1$. *La suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est stable car* $\exists n_0 = 1 \in \mathbb{N}$ *tel que* $\forall n \geq 1, u_n = u_1 = 1$.
2. *Soit* $a \in \mathbb{R}$. *La suite némurique définie pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *par* $u_n = a$ *est appelée* ***la suite constante*** a.

   Exemple 1.14. *Pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *on a* $u_n = 1$ *alors* (u_n) *est la suite constante* 1.
3. *La suite numérique définie pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *par* $u_n = 0$ *est appelée* ***la suite nulle***.

1.2 Opérations sur les suites

Définition 1.15. *(Suite somme)*
Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *deux suites numériques. La somme de* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est la suite numérique dont le terme général est* $u_n + v_n$ *c'est à dire* $(u_n) + (v_n) = (u_n + v_n)$.

Exemple 1.16.

$$\begin{aligned}(\frac{n+1}{n}) + (\frac{1}{n}) &= (\frac{n+1}{n} + \frac{1}{n})\\ &= \frac{n+1+1}{n}\\ &= \frac{n+2}{n}.\end{aligned}$$

Définition 1.17. *(Suite produit)*
Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *deux suites numériques. Le produit de* (u_n) *et* (v_n) *est la suite numérique dont le terme général est* $u_n \times v_n$ *c'est à dire* $(u_n) \times (v_n) = (u_n \times v_n)$.

Exemple 1.18.

$$\begin{aligned}(\frac{n+1}{n}) \times (\frac{1}{n}) &= (\frac{n+1}{n} \times \frac{1}{n})\\ &= \frac{n+1}{n^2}.\end{aligned}$$

Définition 1.19. *(Suite produit par un scalaire)*
Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *deux suites numériques et* $\lambda \in \mathbb{R}$. *Le produit de* (u_n) *par* λ *est la suite numérique dont le terme général est* (λu_n) *c'est à dire* $\lambda \times (u_n) = (\lambda u_n)$.

Exemple 1.20.

$$\begin{aligned}4 \times (\frac{n+1}{n}) &= (4 \times \frac{n+1}{n})\\ &= \frac{4n+4}{n}.\end{aligned}$$

Définition 1.21. *(Suite quotient)*
Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *deux suites numériques. Si pour tout* n, *on a* $v_n \neq 0$ *alors la division de* (u_n) *sur* (v_n) *est la suite numérique dont le terme général est* $\frac{u_n}{v_n}$ *c'est à dire* $\frac{(u_n)}{(v_n)} = (\frac{u_n}{v_n})$.

Exemple 1.22.

$$\begin{aligned}\frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)}{\left(\frac{1}{n}\right)} &= \left(\frac{\frac{n+1}{n}}{\frac{1}{n}}\right)\\ &= n+1.\end{aligned}$$

Définition 1.23. *(Suite inverse)*
Soit (u_n) *une suite numérique. Si pour tout* n *on a* $u_n \neq 0$, *alors l'inverse de la suite* (u_n) *est la suite numérique dont le terme général est* $\frac{1}{u_n}$ *c'est à dire* $\frac{1}{(u_n)} = \left(\frac{1}{u_n}\right)$.

Exemple 1.24.

$$\frac{1}{\left(\frac{1}{n}\right)} = (\frac{1}{\frac{1}{n}})$$
$$= n.$$

1.3 Suites numériques majorées, minorées, bornées

Définition 1.25.

*i) On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **majorée** si*

$$\exists M \in \mathbb{R} : u_n \leq M; \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Exemple 1.26. *On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ telle que $u_n = \frac{1}{n}$.*
On a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$u_n = \frac{1}{n} \leq 1,$$

alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est majorée par 1.

*ii) On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **minorée** si*

$$\exists m \in \mathbb{R} : u_n \geq m; \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Exemple 1.27.
- On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ telle que $u_n = \frac{1}{n}$.
On a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$u_n = \frac{1}{n} > 0,$$

alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est minorée par 0.
- Ainsi, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ telle que $u_n = e^n$ est minorée car pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$e^n > 1.$$

*iii) On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **bornée** si elle est majorée et minorée.*

Exemple 1.28. *La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ telle que $u_n = \frac{1}{n}$ est bornée car elle est majorée et minorée.*

Proposition 1.29.
La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée ssi la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée, c'est à dire

$$\forall n \in \mathbb{N} : \qquad |u_n| \leq M.$$

Exemple 1.30.

a) La suite $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée car

$$\forall n \in \mathbb{N} : \qquad |(-1)^n| = 1 \leq 1.$$

b) Ainsi la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} = (sin(n))_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée car

$$\forall n \in \mathbb{N} : \qquad |sin(n)| \leq 1.$$

1.4 Suites monotones

Définition 1.31. *1) On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **croissante** si*

$$\forall n \in \mathbb{N} : \quad u_{n+1} - u_n \geq 0.$$

Exemple 1.32. *On considère la suite* $(u_n)_{n\geq 2}$ *telle que :* $u_n = n^2 - 5n;\ \forall n \geq 2.$

Remarquons que pour tout $n \geq 2$*, on a*

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= ((n+1)^2 - 5(n+1)) - (n^2 - 5n) \\ &= ((n^2 + 2n + 1 - 5n - 5) - (n^2 - 5n) \\ &= n^2 - 3n - 4 - n^2 + 5n \\ &= 2n - 4 \geq 0. \end{aligned}$$

Alors $(u_n)_{n\geq 2}$ *est croissante.*

- Ainsi, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} = (e^n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est croissante.*

2) On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est* ***strictement croissante*** *si*

$$\forall n \in \mathbb{N} : \quad u_{n+1} - u_n > 0.$$

Exemple 1.33. *On considère la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *telle que :* $u_n = n + 1;\ \forall n \in \mathbb{N}.$

Remarquons que pour tout $n \in \mathbb{N}$*, on a*

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= (n+2) - (n+1) \\ &= 1 > 0. \end{aligned}$$

Alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est strictement croissante.*

- Ainsi, on considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *telle que :* $u_n = 1 - \frac{1}{n};\ \forall n \in \mathbb{N}^*.$

Remarquons que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$*, on a*

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= (1 - \frac{1}{n+1}) - (1 - \frac{1}{n}) \\ &= -\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n} \\ &= \frac{1}{n(n+1)} > 0. \end{aligned}$$

Alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *est strictement croissante.*

3) On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est* ***décroissante*** *si*

$$\forall n \in \mathbb{N} : \quad u_{n+1} - u_n \leq 0.$$

Exemple 1.34. *On considère la suite dont le terme général est* $u_n = 5n - n^2$ *telle que* $n \geq 2$*.*
On a pour tout $n \geq 2$ *:*

$$u_{n+1} - u_n = 4 - 2n \leq 0,$$

alors, $(u_n)_{n\geq 2}$ *est décroissante.*

4) On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est* ***strictement décroissante*** *si*

$$\forall n \in \mathbb{N} : \quad u_{n+1} - u_n < 0.$$

Exemple 1.35. *On considère la suite dont le terme général est* $u_n = 1 + \frac{1}{n}$ *telle que* $n \in \mathbb{N}^*$*.*
On a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ *:*

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= (1 + \frac{1}{n+1}) - (1 + \frac{1}{n}) \\ &= \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} \\ &= \frac{-1}{n(n+1)} < 0. \end{aligned}$$

Alors, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *est strictement décroissante.*

5) On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est* ***monotone*** *si elle croissante ou décroissante.*

2 Suites convergentes

2.1 Les suites qui convergent vers un réel l

Définition 2.1. *Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique et $l \in \mathbb{R}$.*
On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ***tends vers l*** *quand n tend vers l'infini et on écrit $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$ ssi* ***les termes de la suite deviennent aussi proche que l'on veut n devient assez grand.*** *Autrement dit, pour toute $\varepsilon > 0$ que l'on se donne à l'avance, la suite (u_n) est toute entière comprise, ou delà d'un certain rang n_0 (qui dépend de ε) dans l'intervalle $[l-\varepsilon, l+\varepsilon]$.*
Cela nous amène à la formulation officielle, qu'il faudra bien retenir car nous l'utiliserons sans arrêt. On dit, pour une suite (u_n), que sa limite est l quand n tend vers $+\infty$ si :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N} : \quad \forall n \geq n_0 : \ |u_n - l| < \varepsilon.$$

Exemple 2.2. *La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_n = \dfrac{1}{n+1}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$ est tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$, c'-à-d : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.*
En effet, par définition de la limite on a

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 0 \quad ssi \quad \forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 : |\frac{1}{n+1} - 0| < \varepsilon.$$

Soit $\varepsilon > 0$, on cherche l'existence d'un entier naturel $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\dfrac{1}{n+1} < \varepsilon$.
On a

$$\begin{aligned} \frac{1}{n+1} < \varepsilon \quad &\Longrightarrow \quad n+1 > \frac{1}{\varepsilon} \\ &\Longrightarrow \quad n > \frac{1}{\varepsilon} - 1. \end{aligned}$$

Choisissons $n_0 = \max(0, E(\frac{1}{\varepsilon} - 1) + 1)$, on obtient

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 = \max(0, E(\frac{1}{\varepsilon} - 1) + 1) \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 : |\frac{1}{n+1} - 0| < \varepsilon.$$

Exemple 2.3. *Soit $u_n = \dfrac{2n^2+5}{3n^2+3}$; $n \in \mathbb{N}$.*
On a $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2n^2+5}{3n^2+3} = \dfrac{2}{3}$.

En effet, par définition de la limite on a

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{2n^2+5}{3n^2+3} = \frac{2}{3} \qquad ssi \qquad \forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N} : \ \forall n \geq n_0 : |\frac{2n^2+5}{3n^2+3} - \frac{2}{3}| < \varepsilon.$$

Soit $\varepsilon > 0$, on cherche l'existence d'un entier naturel $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $|\dfrac{2n^2+5}{3n^2+3} - \dfrac{2}{3}| < \varepsilon$, c'-à-d : $|\dfrac{9}{9(n^2+1)}| < \varepsilon$.

Donc $\dfrac{1}{n^2+1} < \varepsilon$.
D'où : $n^2 > \dfrac{1}{\varepsilon} - 1$.

On distingue les deux cas suivants :
1^{er} ***cas :*** $(0 < \varepsilon < 1)$

$$\frac{1}{\varepsilon} > 1 \Longrightarrow \frac{1}{\varepsilon} - 1 > 0.$$

Donc

$$n^2 > \frac{1}{\varepsilon} - 1 \Longrightarrow n > \sqrt{\frac{1}{\varepsilon} - 1}.$$

Alors, on peut choisir $n = E(\sqrt{\frac{1}{\varepsilon} - 1}) + 1$.
$2^{ème}$ ***cas :*** $(\varepsilon > 1)$

$$\frac{1}{\varepsilon} < 1 \Longrightarrow \frac{1}{\varepsilon} - 1 < 0.$$

Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'inégalité $n^2 > \frac{1}{\varepsilon} - 1$ est toujours vraie.
En conséquence, on déduit que

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N} :\ \forall n \geq n_0 : |\frac{2n^2+5}{3n^2+3} - \frac{2}{3}| < \varepsilon.$$

2.2 Les suites qui convergent vers l'infini

Quand une suite ne converge pas vers une limite $l \in \mathbb{R}$, elle peut avoir deux comportements différents. Elle peut tendre vers $+\infty(-\infty)$ ou bien ne pas avoir de limite du tout. Par exemple la suite $u_n = (-1)^n$ n'a pas de limite. Voici les définitions de $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ et de $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

Définition 2.4. *On dit que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ si devient toute entière plus grande que n'importe quel nombre $A > 0$ fixé à l'vance, pour peu qu'on attende un rang n_0 suffisamment grand ; c'est à dire :*

$$\forall A > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} :\ n \geq n_0 \Longrightarrow u_n > A.$$

Exemple 2.5. *Soit $u_n = n$; $n \in \mathbb{N}$:* $\quad \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty.$
Soit $A > 0$, on montre que

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} : n \geq n_0 \Longrightarrow n > A.$$

Remarquons que si $n \geq E(A) + 1$, alors $n > A$, donc $u_n = n > A$.
D'où $n_0 = E(A) + 1$.
Par suite,

$$\forall A > 0,\ \exists n_0 = E(A) + 1 \in \mathbb{N} : n \geq n_0 \Longrightarrow u_n = n > A.$$

Définition 2.6. *On dit que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$ si et seulement si*

$$\forall A > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} :\ n \geq n_0 \Longrightarrow u_n < -A.$$

Définition 2.7. *Une suite est dite **convergente** s'il existe $l \in \mathbb{R}$ tel que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$.*

Remarque 2.8. *La suite numérique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas convergente, c'est à dire elle n'admet pas une limite réelle finie. Dans ce cas on dit qu'elle est **divergente**.*

Exemple 2.9. *La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} = (n)_{n\in\mathbb{N}}$ est divergente car $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty \notin \mathbb{R}$.*

Remarque 2.10. *Il y a deux types de divergence*

i) ***Divergence de type infini :*** *suite qui a une limite infinie.*

  Exemple 2.11. *La suite de terme général $u_n = n$.*

ii) ***Divergence de type limite n'existe pas :*** *suite qui n'a pas de limite fini et infini.*

  Exemple 2.12. *La suite de terme général $u_n = (-1)^n$ n' a pas de limite finie et infinie.*

2.3 Propriétés des suites convergentes

Théorème 2.13. *La limite d'une suite convergente est **unique**.*

Théorème 2.14. *Toute suite **convergente** est **bornée**.*

Remarque 2.15. *En général la réciproque est fausse. En effet ; il existe des suites bornées non convergentes.*

Exemple 2.16. *La suite $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée ($|(-1)^n| \leq 1$) mais elle n'est pas convergente.*

2.4 Opérations algébriques sur la convergence des suites

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites numériques

(1) Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont convergentes respectivement vers l et l'. Alors $(\alpha u_n+\beta v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente vers $\alpha l+\beta l'$ tel que $\alpha,\ \beta\in\mathbb{R}$.

(2) On suppose que $u_n\neq 0$ pour tout $n\in\mathbb{N}$. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente vers $l\neq 0$, alors la suite $(\frac{1}{u_n})_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente vers $\frac{1}{l}$.

(3) Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente vers l et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite telle que $v_n\neq 0$ pour tout n, de plus elle est convergente vers $l'\neq 0$, alors la suite $(\frac{u_n}{v_n})_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente vers $\frac{l}{l'}$.

Proposition 2.17.

1. *Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite convergente et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite divergente, alors $(u_n+v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est divergente.*
2. *On suppose que $u_n\neq 0$ pour tout $n\in\mathbb{N}$ en plus elle est convergente vers une limite non nulle, si (v_n) est une suite divergente alors $(u_n\times v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est divergente.*

Formes indéterminées $+\infty-\infty, 0\times\infty, \frac{\infty}{\infty}, \frac{0}{0}, 1^{\infty}, \infty^0$ et 0^{∞}.

2.5 Critères de convergence et de divergence

Theorème 2.18. *Si (u_n) est une suite convergente vers 0 et (v_n) est une suite bornée alors, $(u_n\cdot v_n)$ est convergente vers 0.*

Theorème 2.19. *(Critère d'encadrement des gendarmes)*
Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}, (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ trois suites numériques telles que à partir d'un certain rang, on a $v_n\leq u_n\leq w_n$. Si $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} v_n=\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} w_n=l$, alors $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} u_n=l$. Où $l\in\mathbb{R}$.

Theorème 2.20. *(Critère des suites monotones)*
On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

1. *Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée alors elle est convergente vers $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}}\{u_n\}$.*
2. *Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée alors elle est convergente vers $\inf\limits_{n\in\mathbb{N}}\{u_n\}$.*

Définition 2.21. ***(Suite extraite)***
*Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique. On dit que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **une sous suite** ou **une suite extraite de** $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ s'il existe une application strictement croissante $\varphi:\mathbb{N}\longrightarrow\mathbb{N}$ telle que $v_n=u_{\varphi(n)}$.*

Exemple 2.22. *Prenons la suite définie par : $u_n=(-1)^n$. L'application $\varphi:n\longrightarrow 2n$ donne la sous suite $v_n=U_{2n}=(-1)^{2n}=1$. Cette sous suite est une sous suite constante.*
De même, $\varphi:n\longrightarrow 2n+1$ donne la sous suite $v_n=u_{2n+1}=(-1)^{2n+1}=-1$. Cette sous suite est une sous suite constante.

Définition 2.23. *$(u_{2k})_{k\in\mathbb{N}}$ est appelée **la suite des termes paires** et $(u_{2k+1})_{k\in\mathbb{N}}$ est appelée **la suite des termes impaires**.*

Theorème 2.24. ***(Bolzano Weierstrass)***
Tout suite bornée possède une sous suite extraite convergente.

Theorème 2.25. ***(Critère des suites extraites)***
La suite (u_n) est convergente vers l si et seulement si toutes les suites extraites de (u_n) sont convergentes vers la limite l.

Conséquence 1. ***(Critère de divergence)***

1. *Si la suite (u_n) possède une suite extraite divergente alors (u_n) est divergente.*
2. *Si la suite (u_n) possède deux suites extraites convergente vers deux limites différentes alors (u_n) est divergente.*

Exemples 2.26.

1. *La suite $(n)_{n\in\mathbb{N}}$ est divergente car elle possède une suite extraite divergente qui est la suite $(u_{2k})_{k\in\mathbb{N}} = (2k)_{k\in\mathbb{N}}$ et* $\lim\limits_{k\longrightarrow+\infty} u_{2k} = \lim\limits_{k\longrightarrow+\infty} 2k = +\infty$.
2. *La suite $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est divergente car elle possède deux sous suites extraites $(u_{2k})_{k\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2k+1})_{k\in\mathbb{N}}$ convergentes vers deux limites différentes -1 et 1. En effet, on a*
$$\begin{aligned}\lim_{k\longrightarrow+\infty} u_{2k} &= \lim_{k\longrightarrow+\infty}(-1)^{2k}\\ &= \lim_{k\longrightarrow+\infty} 1\\ &= 1.\end{aligned}$$
Et
$$\begin{aligned}\lim_{k\longrightarrow+\infty} u_{2k+1} &= \lim_{k\longrightarrow+\infty}(-1)^{2k+1}\\ &= \lim_{k\longrightarrow+\infty} -1\\ &= -1.\end{aligned}$$

Définition 2.27. ***(Suites adjacentes)***
*On dit que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont **adjacentes** si :*
1. *$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.*
2. *$(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.*
3. $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty}(u_n - v_n) = 0$.

Exemple 2.28. *On considère les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définies par :*
$$\begin{aligned}u_n &= 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}, \qquad n\in\mathbb{N}^*.\\ v_n &= u_n + \frac{1}{n!}.\end{aligned}$$
On remarque que :

1. *Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$,*
$$\begin{aligned}u_{n+1} - u_n &= \Big(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{(n+1)!}\Big) - \Big(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}\Big)\\ &= \frac{1}{(n+1)!} \geq 0.\end{aligned}$$
Alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante.
2. *Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$,*
$$\begin{aligned}v_{n+1} - v_n &= \Big(u_{n+1} + \frac{1}{(n+1)!}\Big) - \Big(u_n + \frac{1}{n!}\Big)\\ &= (u_{n+1} - u_n) + \Big(\frac{1}{(n+1)!} - \frac{1}{n!}\Big)\\ &= \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+1)!} - \frac{1}{n!}\\ &= \frac{2}{(n+1)!} - \frac{1}{n!}\\ &= \frac{2}{(n+1)n!} - \frac{1}{n!}\\ &= \frac{2-n-1}{(n+1)n!}\\ &= \frac{1-n}{(n+1)n!} \leq 0.\end{aligned}$$
Alors $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante.
3. *De plus,* $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty}(v_n - u_n) = \lim\limits_{n\longrightarrow+\infty}\frac{1}{n!} = 0$.

Theorème 2.29. ***(Critère des suites adjacentes)***
Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont des suites adjacentes alors elles sont convergentes vers la même limite.

Exemple 2.30. *Puisque les deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies dans l'exemple2.28 sont adjacentes alors elles sont convergentes vers la même limite.*

Il se que l'on dit ait besoin de montrer qu'une suite convergente sans nécessairement calculer explicitement sa limite. C'est le cas par exemple quand cette limite est difficile à trouver. Il existe alors un critère qui marche bien pour les suites réelles. C'est le critère de Cauchy.

Définition 2.31. ***(Suite de Cauchy)***
*Une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite de **Cauchy** si elle vérifie **le critère de Cauchy** :*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N} \mid \forall p, q \in \mathbb{N} \quad si\ q \geq p \geq n_0 : \quad |u_q - u_p| < \varepsilon.$$

Proposition 2.32. *Toute suite de Cauchy est bornée.*

La différence principale entre une suite convergente vers une limite $l \in \mathbb{R}$ et une suite de Cauchy est que pour la suite convergente les termes sont à partir d'un certain rang plus proche que la limite l autant que nous voulons $\varepsilon > 0$, cependant, pour la suite de Cauchy les termes sont à partir d'un certain rang plus proche d'eux autant que nous voulons $\varepsilon > 0$.

Theorème 2.33. ***(Critère de convergence de Cauchy)***
Dans $\mathbb{R}$ une suite réelle est convergente si et seulement si elle est de Cauchy.

Exemple 2.34. *On considère la suite numérique dont le terme général est défini par :*

$$u_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2}, \quad n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}.$$

Montrons que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy.
On a

$$u_n = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}.$$

Soient $\varepsilon > 0$ et $p, q \in \mathbb{N}$. Supposons par exemple que $p > q$. Donc,

$$\begin{aligned} u_p &= \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{p^2}, \\ u_q &= \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{p^2} + \frac{1}{(p+1)^2} + \cdots + \frac{1}{q^2}. \end{aligned}$$

Alors,

$$\begin{aligned} |u_p - u_q| &= \Big|\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{p^2} - (\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{p^2} + \frac{1}{(p+1)^2} + \cdots + \frac{1}{q^2})\Big| \\ &= \Big| - (\frac{1}{(p+1)^2} + \cdots + \frac{1}{q^2})\Big| \\ &= \frac{1}{(p+1)^2} + \cdots + \frac{1}{q^2}. \end{aligned}$$

Comme :

$$\begin{aligned} p+1 \geq p &\Longrightarrow (p+1)^2 \geq p(p+1) \\ &\Longrightarrow \frac{1}{(p+1)^2} \leq \frac{1}{p(p+1)} = \frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}, \\ p+2 \geq p+1 &\Longrightarrow (p+2)^2 \geq (p+1)(p+2) \\ &\Longrightarrow \frac{1}{(p+2)^2} \leq \frac{1}{(p+1)(p+2)} = \frac{1}{p+1} - \frac{1}{p+2}, \\ &\vdots \\ q \geq q-1 &\Longrightarrow q^2 \geq q(q-1) \\ &\Longrightarrow \frac{1}{q^2} \leq \frac{1}{q(q-1)} = \frac{1}{q-1} - \frac{1}{q}. \end{aligned}$$

Alors,

$$\begin{aligned}|u_p - u_q| &= \frac{1}{(p+1)^2} + \frac{1}{(p+2)^2} \cdots + \frac{1}{q^2} \\ &\leq \frac{1}{p} - \frac{1}{p+1} + \frac{1}{p+1} - \frac{1}{p+2} + \cdots + \frac{1}{q-1} - \frac{1}{q} \\ &= \frac{1}{p} - \frac{1}{q} \\ &< \frac{1}{p}.\end{aligned}$$

Remarquons que $\lim_{p \longrightarrow +\infty} \frac{1}{p} = 0$, *c'est à dire* $\forall \varepsilon > 0,\ \exists p_0 \in \mathbb{N} \mid \forall p \geq p_0 : \frac{1}{p} < \varepsilon$.
Donc, pour $\varepsilon > 0$ *qu'on va fixé d'avance, il existe un rang* $n_0 = p_0 \in \mathbb{N}$ *tel que :* $p \geq n_0,\ q \geq n_0 \Longrightarrow |u_p - u_q| < \frac{1}{p} < \varepsilon$. *Ce qui signifie que* (u_n) *est de Cauchy.*

3 Suites récurrentes de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$

Soit $f : I \longmapsto \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle I. On s'intéresse ici à une suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 \in I, \\ u_{n+1} = f(u_n), & \text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*. \end{cases}$$

Définition 3.1. *On dit qu'une suite récurrente* (u_n) *donnée par la relation :*

$$\begin{cases} u_0 \in I, \\ u_{n+1} = f(u_n), & \textit{pour tout } n \in \mathbb{N}^*, \end{cases}$$

est bien définie, si pour tout $n \in \mathbb{N}$, *on a bien* $u_n \in I$ *(pour qu'on puisse bien calculer* $f(u_n)$*).*

Theorème 3.2. *(Théorème du point fixe)*
Soit (u_n) *une suite définie par :*

$$\begin{cases} u_0 \in I, \\ \forall n \in I,\ u_{n+1} = f(u_n). \end{cases}$$

Si (u_n) *converge vers un réel* $l \in I$ *et si* f *est continue en* l, *alors on a nécessairement* $f(l) = l$. *Le réel* l *est appelé un point fixe de* f.

Theorème 3.3. *(Méthode générale d'étude d'une suite récurrente)*
Soit (u_n) *une suite définie par :*

$$\begin{cases} u_0 \in I, \\ u_{n+1} = f(u_n), & \textit{pour tout } n \in \mathbb{N}^*. \end{cases}$$

- *Si la fonction* f *est croissante sur l'intervalle* I, *alors la suite* (u_n) *sera monotone.*
- *Si la fonction* f *est décroissante sur l'intervalle* I, *alors on étudie les suites extraites d'indices paires et impaires :* (u_{2n}) *et* (u_{2n+1}) *qui elles seront monotones.*

Troisième partie
Entrainements

4 Exercice corrigé 1

Énoncé

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 & = & \frac{3}{2}, \\ u_{n+1} & = & (u_n-1)^2+1. \end{cases} \tag{1}$$

1) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$1 < u_n < 2.$$

2) Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement monotone.
3) En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et déterminer sa limite.

Solution

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la relation de récurrence comme suit :

$$\begin{cases} u_0 & = & \frac{3}{2}, \\ u_{n+1} & = & (u_n-1)^2+1. \end{cases}$$

1) Posons :

$$(P_n) : \qquad 1 < u_n < 2.$$

Montrons en utilisant le raisonnement par récurrence que (P_n) est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Initialisation :
Pour $n = 0$, par hypothèse on sait que : $1 < u_0 = \frac{3}{2} < 2$.
Hérédité :
Supposons que la proposition (P_k) est vraie pour tout $1 \leq k \leq n$ et prouvons que $P(n+1)$ l'est aussi $(1 < u_{n+1} < 2)$.

Comme $1 < u_n < 2$ (hypothèse de récurrence).
Donc $0 < u_n - 1 < 1$, d'où $0 < (u_n-1)^2 < 1$.
Alors $1 < (u_n-1)^2 + 1 < 2$.
C'-à-d : $P(n+1)$ est aussi vraie.
Conclusion :
Par le principe de récurrence, on déduit que (P_n) est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$. C'-à-d : $1 < u_n < 2$.

2) Soit $n \in \mathbb{N}$, calculons $u_{n+1} - u_n$:
On a

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= (u_n-1)^2 + 1 - u_n \\ &= u_n^2 - 2u_n + 1 + 1 - u_n \\ &= u_n^2 - 3u_n + 2 \\ &= (u_n-1)(u_n-2). \end{aligned}$$

D'après la première question $u_n - 1 > 0$ et $u_n - 2 < 0$.
Donc $u_{n+1} - u_n < 0$.
D'où la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante.

3) Comme la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par 1 et strictement décroissante alors, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente vers l tel que l vérifie $l = (l-1)^2 + 1$.
Donc $l^2 - 3l + 2 = 0$.
Alors $l = 1$ ou $l = 2$.
Comme le premier terme $u_0 = \frac{3}{2}$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, alors $l = 1$.

5 Exercice corrigé 2

Énoncé

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :

$$u_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + ... + \frac{1}{2n}.$$

1) Montrons que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante.

2) Montrons que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente et que sa limite l vérifie $\frac{1}{2} \leq l \leq 1$.

Solution

1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \frac{1}{n+4} + ... + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \left[\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + ... + \frac{1}{2n}\right] \\ &= \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n+1} \\ &= \frac{2(n+1) + 2n+1 - 2(2n+1)}{(2n+1)2(n+1)}. \end{aligned}$$

Donc

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(2n+1)2(n+1)} > 0.$$

Donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante.

2) Remarquons que pour tout $k \in \{1, 2, ..., n\}$, on a $n+1 \leq n+k \leq n+n$.
Donc

$$\frac{1}{2n} \leq \frac{1}{n+k} \leq \frac{1}{n+1}.$$

Alors

$$\underbrace{\frac{1}{2n} + ... + \frac{1}{2n}}_{nfois} \leq \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + ... + \frac{1}{2n} \leq \underbrace{\frac{1}{n+1} + ... + \frac{1}{n+1}}_{nfois}.$$

D'où

$$\frac{1}{2} = n\,\frac{1}{2n} \leq u_n \leq n\,\frac{1}{n+1} < 1.$$

Ce qui implique que

$$\frac{1}{2} \leq u_n < 1.$$

Comme $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante et majorée, donc elle est convergente vers une limite finie l tel que

$$\frac{1}{2} \leq l = \lim_{n\to+\infty} u_n \leq 1.$$

6 Exercice corrigé 3

Énoncé

Étudier la convergence des suites suivantes :

1) $u_n = \sqrt{n^2+n+1} - \sqrt{n}$.

2) $u_n = \dfrac{n\sin(n)}{n^2+1}$.

3) $u_n = \frac{1}{n} + (-1)^n$.

4) $u_n = n \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{1}{n^2+k}$.

5) $u_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \cos\left(\frac{1}{\sqrt{n+k}}\right)$.

Solution

1) $u_n = \sqrt{n^2+n+1} - \sqrt{n}$:
Remarquons que

$$\begin{aligned} v_n &= \sqrt{n^2+n+1} \\ &= \sqrt{n^2(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2})} \\ &= n\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}. \end{aligned}$$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} 1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2} = 1$.
Donc (v_n) a le même comportement lorsque n tends vers l'infini, que la suite n : $\sqrt{n^2+n+1} \sim n$.
Par suite, $u_n = \sqrt{n^2+n+1} - \sqrt{n}$ a le même comportement que $n - \sqrt{n}$ et comme

$$\begin{aligned} \lim_{n\to+\infty} n - \sqrt{n} &= \lim_{n\to+\infty} \frac{n-\sqrt{n}}{n+\sqrt{n}}(n+\sqrt{n}) \\ &= \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2-n}{n+\sqrt{n}} \\ &= \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2(1-\frac{1}{n})}{n^2(\frac{1}{n}+\frac{1}{n\sqrt{n}})} \\ &= \lim_{n\to+\infty} \frac{1-\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}+\frac{1}{n\sqrt{n}}} = +\infty. \end{aligned}$$

Donc, la suite (u_n) est une suite divergente.

2) $u_n = \frac{n\sin(n)}{n^2+1}$:
Remarquons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$0 \leq |u_n| = |\frac{n\sin(n)}{n^2+1}| \leq \frac{n}{n^2+1}. \tag{2}$$

Posons

$$\begin{aligned} v_n &= 0; \quad n \in \mathbb{N}, \\ w_n &= \frac{n}{n^2+1}; \ n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0 = \lim\limits_{n\to+\infty} w_n$.
Alors, d'après le théorème d'encadrement des gendarmes $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite convergente vers 0 et par suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est aussi convergente vers 0.

3) $u_n = \frac{1}{n} + (-1)^n$

Remarquons que (u_n) possède deux sous suites extraites qui sont :

$$u_{2k} = \frac{1}{2k} + (-1)^{2k} = \frac{1}{2k} + 1.$$

Et

$$u_{2k+1} = \frac{1}{2k+1} + (-1)^{2k+1} = \frac{1}{2k+1} - 1.$$

De plus

$$\lim_{k\to+\infty} u_{2k} = 1.$$
$$\lim_{k\to+\infty} u_{2k+1} = -1.$$

Alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est divergente.

4) $u_n = n\displaystyle\sum_{k=1}^{2n+1} \frac{1}{n^2+k}$; $n \in \mathbb{N}^*$

Remarquons que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $1 \leq k \leq 2n+1$, donc $n^2+1 \leq n^2+k \leq n^2+2n+1$.
Alors

$$\frac{1}{(n+1)^2} \leq \frac{1}{n^2+k} \leq \frac{1}{n^2+1}.$$

D'où

$$(2n+1)\,\frac{1}{(n+1)^2} \leq \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{1}{n^2+k} \leq (2n+1)\,\frac{1}{n^2+1}.$$

Par suite

$$\frac{n(2n+1)}{(n+1)^2} \leq u_n = n\sum_{k=1}^{2n+1} \frac{1}{n^2+k} \leq \frac{n(2n+1)}{n^2+1}.$$

Posons

$$\begin{aligned} v_n &= \frac{n(2n+1)}{(n+1)^2}, \\ w_n &= \frac{n(2n+1)}{n^2+1}. \end{aligned}$$

Comme $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} v_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{2n^2}{n^2} = 2$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} w_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{2n^2}{n^2} = 2.$

Alors, d'après le théorème d'encadrement des gendarmes, on déduit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente. De plus $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = 2.$

5) $u_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \cos\frac{1}{\sqrt{n+k}}$

Comme $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$, alors $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \cos\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = 1.$

Ceci équivalent à dire que

$$\forall\varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geq n_0 : \quad |\cos(\frac{1}{\sqrt{n}}) - 1| < \varepsilon.$$

Fixons $\varepsilon > 0$, donc il existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tel que :

$$\forall n \geq n_0 : \quad \cos(\frac{1}{\sqrt{n}}) > 1 - \varepsilon.$$

Comme pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$n \leq n+1 \leq n+2 \leq ... \leq 2n+1.$$

Donc
$$\sqrt{n} \leq \sqrt{n+1} \leq ... \leq \sqrt{2n+1}.$$
Alors
$$1 \geq \frac{1}{\sqrt{n}} \geq \frac{1}{\sqrt{n+1}} \geq ... \geq \frac{1}{\sqrt{2n+1}} > 0.$$
Puisque la fonction $x \mapsto \cos x$ est décroissante sur $[0, 1]$, on a alors pour tout $n \geq n_0$:
$$1 - \varepsilon \leq \cos(\frac{1}{\sqrt{n}}) \leq \cos(\frac{1}{\sqrt{n+1}}) \leq ... \leq \cos(\frac{1}{\sqrt{2n+1}}) < \cos(0) = 1.$$
Donc pour tout$n \geq n_0$
$$n(1-\varepsilon) \leq \sum_{k=0}^{n-1} \cos(\frac{1}{\sqrt{n+k}}) < n.$$
Ce qui implique que
$$1 - \varepsilon \leq \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \cos(\frac{1}{\sqrt{n+k}}) < 1.$$
Comme ε est pris petit arbitrairement, alors par passage à la limite lorsque $\varepsilon \to 0$, on obtient
$$1 \leq u_n \leq 1.$$
Alors, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente vers 1.

7 Exercice corrigé 4

Énoncé

Étudier la convergence et calculer (en cas d'existence) la limite des suites définies par :

1) $u_1 = 1,\ u_{n+1} = \sqrt{u_n + 6},\ n \in \mathbb{N}^*$.
2) $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+k}},\ n \in \mathbb{N}$.
3) $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)},\ n \in \mathbb{N}^*$.
4) $u_0 = 0,\ u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2},\ n \in \mathbb{N}^*$.

   Indication : Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $0 \leq u_n \leq 2$ et étudier la monotonie de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
5) $u_0 \in \mathbb{R},\ u_{n+1} = u_n - u_n^2$.

Solution

1) $u_1 = 1,\ u_{n+1} = \sqrt{u_n + 6},\ n \in \mathbb{N}^*$

   On considère la fonction f définie sur $I = [1, 3]$ par : $f(x) = \sqrt{x+6}$.
   Remarquons que f est continue sur I, de plus pour tout $x, y \in I$ tel que $x < y$, on a : $f(x) = \sqrt{x+6} < \sqrt{y+6} = f(y)$, c'est-à-dire f est croissante sur I.
   Alors, pour tout $x \in [1, 3]$: $1 \leq x \leq 3 \Longrightarrow 1 < \sqrt{7} = f(1) \leq f(x) \leq f(3) = 3$.
   Par conséquent $f(I) \subset I$.

   Par suite $u_n \in [1, 3]$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, c'est-à-dire $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite bornée (majorée par 3 et minorée par 1).

D'autre part, pour tout $x \in I$, on a

$$\begin{aligned} f(x) - x &= \sqrt{x+6} - x \\ &= \frac{(x+6) - x^2}{\sqrt{x+6} + x} \\ &= \frac{-x^2 + x + 6}{\sqrt{x+6} + x} \\ &= \frac{(3-x)(x+2)}{x + \sqrt{x+6}} \geq 0. \end{aligned}$$

D'où : $f(u_n) = u_{n+1} \geq u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
C'est-à-dire $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante.
Par conséquence, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente vers une limite finie l, tel que $f(l) = l$.
Donc

$$\begin{aligned} f(l) = l &\iff \sqrt{l+6} = l \\ &\iff l + 6 = l^2 \\ &\iff -l^2 + l + 6 = 0 \\ &\iff l = -2 \text{ ou } l = 3. \end{aligned}$$

Comme $-2 \notin I$, donc $l = 3$.

2) $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+k}}$
Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $1 \leq k \leq n$, on a

$$n^2 + 1 \leq n^2 + k \leq n^2 + n.$$

Comme la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est croissante, alors

$$\sqrt{n^2+1} \leq \sqrt{n^2+k} \leq \sqrt{n^2+n}.$$

Donc

$$\frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n^2+k}} \leq \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}.$$

Par suite,

$$n \, \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \leq u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+k}} \leq n \, \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}.$$

Cela implique que

$$n \, \frac{1}{\sqrt{n^2(1+\frac{1}{n})}} \leq u_n \leq n \, \frac{1}{\sqrt{n^2(1+\frac{1}{n^2})}}.$$

D'où

$$\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}} \leq u_n \leq \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}.$$

Puisque

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}} = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}} = 1.$$

Alors, d'après le théorème d'encadrement des gendarmes, on déduit que (u_n) est convergente vers 1.

3) $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$
Remarquons que pour tout $1 \leq k \leq n$, on a

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}.$$

Donc

$$\begin{aligned} u_n &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} \\ &= \left[1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n}\right] - \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}\right] \\ &= 1 - \frac{1}{n+1}. \end{aligned}$$

Par suite $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} u_n = 1$ et donc on déduit que (u_n) est convergente.

5)

$$\begin{cases} u_0 = 0, \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2}. \end{cases}$$

Tout d'abord remarquons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $0 \leq u_n \leq 2$.
En effet :
Par récurrence on a

— Pour $n = 0$, $0 \leq u_0 = 0 \leq 2$.

— Supposons que pour tout $0 \leq k \leq n$; $u_k \in [0, 2]$ et montrons que $u_{n+1} \in [0, 2]$.
Par hypothèse de récurrence, on sait que $0 \leq u_n \leq 2$. Donc $2 \leq u_n + 2 \leq 4$. D'où $0 \leq \sqrt{2} \leq u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2} \leq 2$.

Maintenant, on montre par récurrence que (u_n) est croissante.

— Pour $n = 0$ on a

$$\begin{aligned} u_{1+0} - u_0 &= u_1 - u_0 \\ &= \sqrt{2} - 0 \\ &= \sqrt{2} \geq 0. \end{aligned}$$

— Supposons que pour tout $0 \leq k \leq n-1$ on a $u_{k+1} - u_k \geq 0$ et prouvons que $u_{n+1} - u_n \geq 0$.
Par hypothèse de récurrence on sait que $u_{n-1} - u_n \geq 0$. Donc $u_n \geq u_{n-1}$.
D'où $2 + u_n \geq 2 + u_{n-1}$. Alors $u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n} \geq u_n = \sqrt{2 + u_{n-1}}$.

Donc ça prouve que la suite (u_n) est croissante et comme (u_n) est majorée par 2 alors on déduit que (u_n) est convergente.

La fonction associée à la suite récurrente (u_n) est notée par f telle que

$$\begin{aligned} f : [-2, +\infty[&\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x) = \sqrt{x + 2}. \end{aligned}$$

Comme f est continue sur $[-2, +\infty[$, la limite l vérifie $l = f(l)$ c'est à dire $l = \sqrt{l + 2}$. Donc $l = 2$ ou $l = -1$.
Comme (u_n) est positive et croissante alors $l = 2$.

8 Exercice corrigé 5

Énoncé

On considère la fonction $f(x) = x - x^2$.

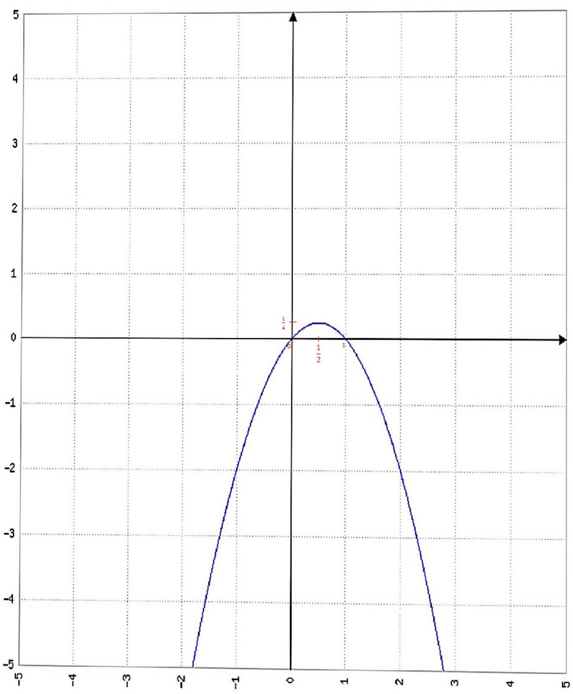
1. Étudier les variations de la fonction f.
2. Déduire la convergence de la suite suivante :

$$\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R}, \\ u_{n+1} = u_n - u_n^2, \qquad n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Solution

1. Étudions les variations de la fonction f :
   On a $f(x) = x - x^2 = x(1-x)$.
   — $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$.
   — $\lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} f(x) = -\infty$.
   — $f'(x) = 1 - 2x$. Donc
   — $f'(x) = 0 \Longleftrightarrow 1 - 2x = 0 \Longrightarrow x = \dfrac{1}{2}$ et $f(\dfrac{1}{2}) = \dfrac{1}{4}$.

x	$-\infty$		0		$\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$			0			$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{4}$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$



2. On considère la suite récurrente suivante :

$$\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R}, \\ u_{n+1} = u_n - u_n^2 = u_n(1-u_n), \qquad n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Remarquons que $u_{n+1} = f(u_n)$, donc plusieurs cas se présente selon la valeur de u_0.

Cas 1 : Si $u_0 = 0 \vee u_0 = 1$ alors

$$\begin{aligned} u_1 &= u_0 - u_0^2 = 0, \\ u_2 &= u_1 - u_1^2 = 0, \\ &\vdots \\ u_{n+1} &= u_{n+1} - u_{n+1}^2 = 0. \end{aligned}$$

C'est à dire $u_k = 0, \quad \forall k > 1$.
Dans ce cas (u_n) est la suite nulle et elle converge vers 0.

Cas 2 : Si $u_n \in]0,1[$ alors (d'après le graphe de f) $u_1 = f(u_0) \in]0, \frac{1}{4}]$.

Ainsi $u_2 = f(u_1) \in]0, \frac{1}{4}]$.

Donc $u_k \in]0, \frac{1}{4}]$; $\forall k \geq 1$. Cela veut dire que la suite (u_k) est majorée par $\frac{1}{4}$ et minorée par 0.

Montrons par récurrence que $u_{k+1} - u_k \leq 0$.

— Pour $n = 0$

$$\begin{aligned} u_1 - u_0 &= u_0 - u_0^2 - u_0 \\ &= -u_0^2 < 0. \end{aligned}$$

— Supposons que $u_{k+1} - u_k \leq 0$ pour $1 \leq k \leq n-1$ et montrons que $u_{n+1} - u_n \leq 0$. Par hypothèse de récurrence, on sait que $u_n - u_{n-1} \leq 0$. Donc $u_n \leq u_{n-1}$.

Comme $u_n, u_{n-1} \in]0, \frac{1}{4}]$ et f est croissante sur $]0, \frac{1}{4}]$ alors $f(u_n) = u_{n+1} \leq f(u_{n-1}) = u_n$.

Ce qui implique que (u_n) est décroissante.

Comme (u_n) est minorée par 0, alors elle est convergente vers $l \in \mathbb{R}$.

Puisque f est continue sur $]0,1[$ alors la limite l vérifie : $f(l) = l$ c'est à dire $l - l^2 = l \Longleftrightarrow l = 0$.

Cas 3 : Si $u_0 < 0$ alors

$$\begin{aligned} u_1 &= f(u_0) < 0, \\ u_2 &= f(u_1) < 0, \\ &\vdots \\ u_{n+1} &= f(u_n) < 0. \end{aligned}$$

Et par suite la relation $u_{k+1} = u_k - u_k^2$ montre inductivement que (u_k) est strictement décroissante.

Alors soit (u_n) converge vers $-\infty$, soit (u_n) est minorée et converge vers une limite finie.

Mais on a vu précédemment que si $u_k \longrightarrow l$ lorsque $k \longrightarrow +\infty$ alors nécessairement $l = 0$. Ce qu'est impossible ici puisque $u_0 < 0$ et (u_n) décroissante.

Par conséquent, si $u_0 < 0$ la suite (u_n) est divergente vers $-\infty$.

Cas 4 : Si $u_0 > 1$ alors

$$\begin{aligned} u_1 &= f(u_0) = u_0(1-u_0) < 0, \\ u_2 &= f(u_1) < 0, \\ &\vdots \\ u_n &= f(u_{n-1}) < 0. \end{aligned}$$

Donc, (u_n) est une suite négative et l'on retombe dans le 3ème cas.

9 Exercice corrigé 6

Énoncé

On considère la suite (u_n) définie par $u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{\sin k}{2^k}$; $n \in \mathbb{N}$.

1. (a) Montrer que (u_n) est une suite de Cauchy.
   (b) Que peut on déduire ?
2. Soit la suite numérique définie par : $v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$; $n \in \mathbb{N}^*$.
   (a) Montrer qu'il existe une constante positive $a > 0$ telle que $v_{2n} - v_n \geq a$.
   (b) Que peut on déduire ?

Solution

1. Soit $u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{\sin k}{2^k}$; $n \in \mathbb{N}$.
   (a) Montrons que (u_n) est de Cauchy. C'est à dire montrons que

   $\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N} / \forall p, q \in \mathbb{N},\ q > p \geq n_0 \Longrightarrow |u_q - u_p| < \varepsilon$.
   Soient $\varepsilon > 0, p, q \in \mathbb{N}$ tels que $q > p$ $(q = p + n,\ \in n \in \mathbb{N}^*)$.
   On cherche l'existence d'un $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $p, q \geq n_0 \Longrightarrow |u_p - u_q| < \varepsilon$.
   On a

$$
\begin{aligned}
|u_q - u_p| &= |u_{p+n} - u_p| \\
&= \Big| \sum_{k=0}^{n+p} \frac{\sin k}{2^k} - \sum_{k=0}^{p} \frac{\sin k}{2^k} \Big| \\
&= \Big| \sum_{k=p+1}^{n+p} \frac{\sin k}{2^k} \Big| \\
&\leq \sum_{k=p+1}^{n+p} \Big| \frac{\sin k}{2^k} \Big| \\
&\leq \sum_{k=p+1}^{n+p} \frac{1}{2^k} \\
&= \frac{1}{2^{p+1}} + \frac{1}{2^{p+2}} + \cdots + \frac{1}{2^{p+n}} \\
&= \frac{1}{2^p} \Big[\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^n} \Big] \\
&= \frac{1}{2^p} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} \\
&= \frac{1}{2^p} \sum_{k=1}^{n} \Big(\frac{1}{2} \Big)^k.
\end{aligned}
$$

Comme

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{k} &\leq \sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{k}\\ &\leq \lim_{n\longrightarrow+\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{k}\\ &= \lim_{n\longrightarrow+\infty}\frac{1-(\frac{1}{2})^n}{1-\frac{1}{2}} \quad \text{(Somme d'une suite géométrique de raison } \frac{1}{2})\\ &= 2.\end{aligned}$$

Alors $|u_q - u_p| \leq 2 \times (\frac{1}{2})^p$.

Puisque $\lim_{p\longrightarrow+\infty}(\frac{1}{2})^p = 0$ alors, $\forall\varepsilon>0,\ \exists n_0\in\mathbb{N}/\forall n\geq n_0 : |(\frac{1}{2})^p - 0| < \varepsilon$. Donc, pour $\frac{\varepsilon}{2}>0$, on assure l'existence d'un $n_0\in\mathbb{N}$ vérifiant $(\frac{1}{2})^p < \frac{\varepsilon}{2}$.

Par suite $\forall\varepsilon>0,\ \exists n_0\in\mathbb{N}/\forall p,q\in\mathbb{N},\ q>p\geq n_0 \Longrightarrow |u_q-u_p| < 2\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \Longleftrightarrow (u_n)$ est une suite de Cauchy.

(b) On déduit que (u_n) est convergente.

2. Soit la suite $v_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$, $k\in\mathbb{N}^*$.

(a) Montrons qu'il existe $a>0$ tel que $v_{2n}-v_n\geq a$.
On a

$$\begin{aligned}v_{2n}-v_n &= \sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\\ &= \sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{k}\\ &= \frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}\\ &\geq \frac{1}{2n}+\frac{1}{2n}+\cdots+\frac{1}{2n}\\ &= n\times\frac{1}{2n}\\ &= \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Alors $\exists a = \frac{1}{2} > 0 / v_{2n}-v_n \geq \frac{1}{2}$.

(b) Remarquons que, si on prend $\varepsilon = \frac{1}{2} > 0$, $p=n$ et $q=2n$ tels que $n\in\mathbb{N}^*$ on trouve $\exists\varepsilon = \frac{1}{2} > 0, \forall n\in\mathbb{N}^*,\ \exists p = n,\ q=2n/|v_q-v_p|\geq\varepsilon$. Ce qui signifie que (u_n) n'est pas de Cauchy et on déduit que (u_n) est divergente.

10 Exercice corrigé 7

Énoncé

Soit (u_n) la suite définie par :

$$\begin{aligned}&u_0\in]1,2[,\\ &u_{n+1} = \frac{4u_n+2}{u_n+3},\ n\in\mathbb{N}.\end{aligned}$$

1. Montrer que (u_n) est une suite croissante et majorée.
2. En déduire que (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

Solution

1. (a) On définit la fonction f comme suit :

$$f(x) = \frac{4x+2}{x+3}, \; x \neq -3.$$

Étudions les variations de f.
On a

— **Le domaine de définition**
$\mathcal{D}_f = \mathbb{R}/\{-3\} =]-\infty, -3[\cup]-3, +\infty[$.

— **Les limites**

$$\lim_{x \longrightarrow -\infty} f(x) = 4.$$
$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} f(x) = 4.$$
$$\lim_{x \overset{>}{\longrightarrow} -3} f(x) = \frac{-10}{0^+} = -\infty.$$
$$\lim_{x \overset{<}{\longrightarrow} -3} f(x) = \frac{-10}{0^-} = +\infty.$$

— **La dérivée**

$$f'(x) = \frac{4(x+3)-(4x+2)}{(x+3)^2} = \frac{10}{(x+3)^2} > 0.$$

Donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}/\{-3\}$.

— **Le tableau**

x	$-\infty$		-3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	‖	$+$	
$f(x)$	4	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ $-\infty$	$\nearrow$	4

On a

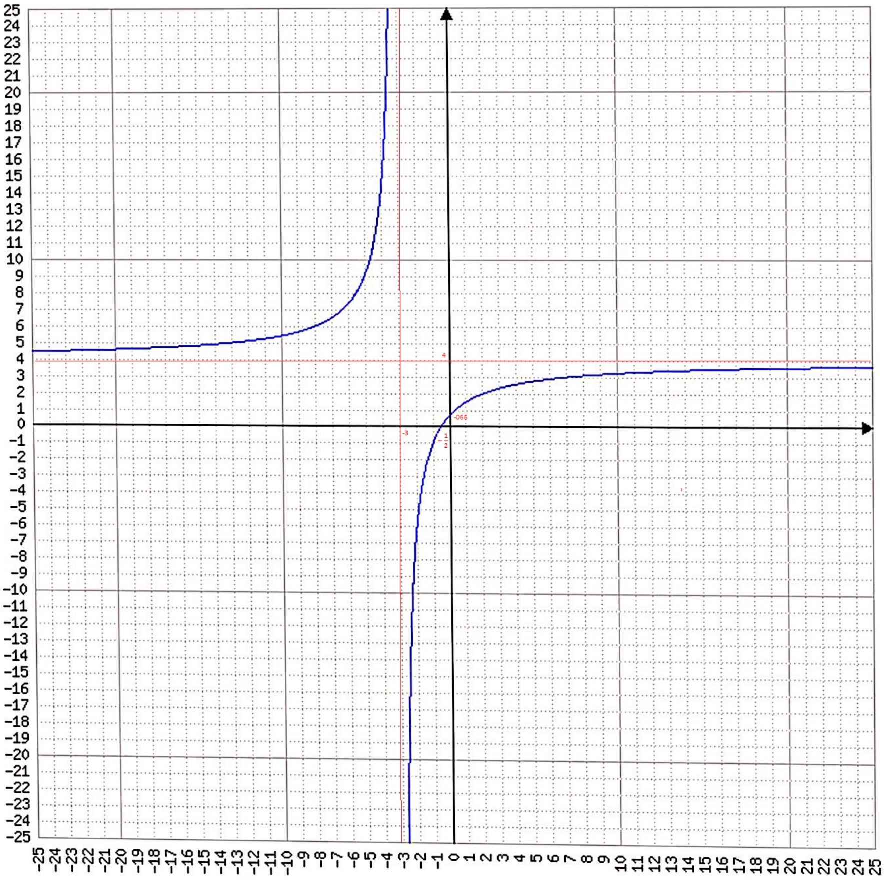
$$x = \frac{-1}{2} \Longrightarrow f(x) = 0.$$
$$x = 0 \Longrightarrow f(x) = \frac{2}{3}.$$

— **Le graphe**

(b) On définit la suite (u_n) comme suit :

$$\begin{cases} u_0 \in]1,2[, \\ u_{n+1} = \dfrac{4u_n+2}{u_n+3}, \; n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Remarquons que $u_{n+1} = f(u_n)$ et comme f est strictement croissante il suffit de comparer u_1 et u_0 pour étudier la croissance de la suite (u_n).



On a

$$\begin{aligned}
u_1 - u_0 &= f(u_0) - u_0 \\
&= \frac{4u_0 + 2}{u_0 + 3} - u_0 \\
&= \frac{(4u_0 + 2) - u_0(u_0 + 3)}{u_0 + 3} \\
&= \frac{-u_0^2 + u_0 + 2}{u_0 + 3} \\
&= \frac{-(u_0 - 2)(u_0 + 1)}{u_0 + 3}.
\end{aligned}$$

Comme $u_0 \in]1, 2[$ et $u_0 > 0$ on a donc $u_1 - u_0 > 0$. Alors on déduit que (u_n) est croissante.

En effet,

$$\begin{aligned}
u_1 > u_0 &\Longrightarrow f(u_1) > f(u_0) \qquad f \text{ strictement croissante} \\
&\Longrightarrow u_2 > u_1 \\
&\Longrightarrow f(u_2) > f(u_1) \qquad f \text{ strictement croissante} \\
&\Longrightarrow u_3 > u_2 \\
&\vdots \\
&\Longrightarrow u_n > u_n - 1 \\
&\Longrightarrow f(u_n) > f(u_{n-1}) \\
&\Longrightarrow u_{n+1} > u_n.
\end{aligned}$$

(c) Maintenant, montrons par récurrence que $u_n \leq 2$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

— **Initialisation :**

Pour $n = 0$, on a par hypothèse $1 < u_0 < 2$.

— **Héridité :** Supposons que pour tout $0 \leq k \leq n$, $1 < u_k < 2$ et montrons que $u_{n+1} < 2$.
On a

$$\begin{aligned} 1 < u_n < 2 &\Longrightarrow f(1) < f(u_n) < f(2) \qquad f \text{ est strictement croissante} \\ &\Longrightarrow \frac{3}{2} < u_{n+1} < 2. \end{aligned}$$

— **Conclusion :**
Par le principe de récurrence on déduit que $1 < u_n < 2$, $\forall n \in \mathbb{N}$. C'est à dire que (u_n) est majorée par 2 et par suite on déduit que (u_n) est convergente vers une limite $l \in \mathbb{R}$.

2. Comme f est continue, alors l est une solution de l'équation $l = f(l)$.
Donc

$$\begin{aligned} l = \frac{4l+2}{l+3} &\Longrightarrow 4l + 2 = l(l+3) \\ &\Longrightarrow l^2 - l - 2 = 0 \\ &\Longrightarrow (l-2)(l+1) = 0 \\ &\Longrightarrow l = 2 \vee l = -1. \end{aligned}$$

D'après la question précédente on a $1 < u_n < 2$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Donc $1 \leq \lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} u_n = l \leq 2$. D'où $l = 2$.

11 Exercice corrigé 8

Énoncé

Soit (u_n) la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1, \\ u_{n+1} = 2\dfrac{u_n + 1}{u_n + 2}, \qquad \forall n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

1. Déterminer la fonction f telle que $u_{n+1} = f(u_n)$, $\forall n \in \mathbb{N}$ et montrer que f est croissante.
2. Calculer $f(\sqrt{2})$. Déduire par récurrence que $1 \leq u_n \leq \sqrt{2}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.
3. Vérifier que (u_n) est croissante.
4. Montrer que (u_n) est convergente et calculer sa limite.

Solution

1. On définit la fonction f comme suit :

$$f(x) = 2\frac{x+1}{x+2} = \frac{2x+2}{x+2}, \qquad x \neq -2.$$

Pour tout $x \neq -2$, on a

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{2(x+2) - (2x+2)}{(x+2)^2} \\ &= \frac{2}{(x+2)^2} > 0. \end{aligned}$$

Donc f est croissante.

2. (a)

$$\begin{aligned} f(\sqrt{2}) &= 2\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}+2} \\ &= 2\frac{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-2)}{(\sqrt{2}+2)(\sqrt{2}-2)} \\ &= 2\frac{2 - 2\sqrt{2} + \sqrt{2} - 2}{2-4} \\ &= \frac{-2\sqrt{2}}{-2} \\ &= \sqrt{2}. \end{aligned}$$

(b) Par récurrence on déduit que $1 \leq u_n \leq \sqrt{2}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

— **Initialisation :**
Pour $n = 0, 1 \leq u_0 = 1 \leq \sqrt{2}$.

— **Héridité :**
Supposons que pour tout $0 \leq k \leq n$, $1 \leq u_k \leq \sqrt{2}$ et montrons que $1 \leq u_{n+1} \leq \sqrt{2}$.
Par hypothèse de récurrence on a $1 \leq u_n \leq \sqrt{2}$. Comme f est croissante on obtient $f(1) \leq f(u_n) \leq f(\sqrt{2})$ c'est à dire $1 < \frac{4}{3} \leq u_{n+1} \leq \sqrt{2}$.

— **Conclusion :**
Par le principe de récurrence on déduit que $1 \leq u_n \leq \sqrt{2}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3. Soit $n \geq 0$, on a

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{2u_n + 2}{u_n + 2} - u_n \\ &= \frac{2u_n + 2 - u_n(u_n + 2)}{u_n + 2} \\ &= \frac{2u_n + 2 - u_n^2 - 2u_n}{u_n + 2} \\ &= \frac{2 - u_n^2}{u_n + 2}. \end{aligned}$$

Puisque

$$\begin{aligned} 1 \leq u_n \leq \sqrt{2} &\Longrightarrow 1 \leq u_n^2 \leq 2 \\ &\Longrightarrow -2 \leq -u_n^2 \leq -1 \\ &\Longrightarrow 0 \leq 2 - u_n^2 \leq 1. \end{aligned}$$

On déduit que $u_{n+1} - u_n \geq 0$. Ce qui veut dire que (u_n) est croissante.

4. Comme (u_n) est majorée par $\sqrt{2}$ et croissante, alors (u_n) est convergente vers une limite $l \in \mathbb{R}$ telle que

$$\begin{aligned} f(l) = l &\Longleftrightarrow \frac{2l + 2}{l + 2} = l \\ &\Longleftrightarrow 2l + 2 = l^2 + 2l \\ &\Longleftrightarrow l^2 - 2 = 0 \\ &\Longleftrightarrow (l - \sqrt{2})(l + \sqrt{2}) = 0 \\ &\Longleftrightarrow l = \sqrt{2} \ \vee \ l = -\sqrt{2}. \end{aligned}$$

D'après la question 2 on sait que $1 \leq u_n \leq \sqrt{2}$, donc $1 \leq l = \lim_{n \longrightarrow +\infty} u_n \leq \sqrt{2}$. Alors $l = \sqrt{2}$.

12 Exercice corrigé 9

Énoncé

On considère les suites (u_n) dont le terme général est défini ci-dessous :

a. $u_n = \dfrac{n + \cos n}{n - \sin n}$, $n \geq 2$.

b. $u_n = \dfrac{n}{n^2 + 1} + \dfrac{n}{n^2 + n} + \cdots + \dfrac{n}{n^2 + n}$.

c. $u_n = \dfrac{n + \sin n}{n - \cos n}$, $n \geq 2$.

d. $u_n = \dfrac{n}{n^2 + n + 1} + \dfrac{n}{n^2 + n + 2} + \cdots + \dfrac{n}{n^2 + 2n}$.

1. Calculer la limite l des suites (u_n).
2. Trouver, pour chacune des suites un entier N_0 tel que, si $n \geq N_0$ on ait $|u_n - l| \leq 10^{-2}$.

Solution

a. Soit $u_n = \dfrac{n+\cos n}{n-\sin n}$; $n \geq 2$.

1. Remarquons que $u_n = \dfrac{n\left(1+\dfrac{\cos n}{n}\right)}{n\left(1-\dfrac{\sin n}{n}\right)}$.

   Donc $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} u_n = \lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} \dfrac{1+\dfrac{\cos n}{n}}{1-\dfrac{\sin n}{n}}$.

   Comme $(\cos n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\sin n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont des suites bornées et $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$, alors $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} \dfrac{\cos n}{n} = 0 = \lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} \dfrac{\sin n}{n}$.
   Par suite $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} u_n = 1$.

2. Par définition de la limite on a $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} u_n = 1$ ssi $\forall\varepsilon > 0, \exists N_0 \in \mathbb{N}/n \geq N_0 : |u_n - 1| < \varepsilon$.
   On a
   $$\begin{aligned} u_n - 1 &= \frac{n+\cos n}{n-\sin n} - 1 \\ &= \frac{\cos n+\sin n}{n-\sin n}. \end{aligned}$$
   Comme
   $$\begin{aligned} |\cos n+\sin n| &\leq |\cos n| + |\sin n| \\ &\leq 2. \end{aligned}$$
   Et pour $n \geq 2$,
   $$\begin{aligned} |n-\sin n| &\geq n-\sin n \\ &\geq n - |\sin n| \\ &\geq n-1 > 0. \end{aligned}$$
   Donc
   $$\begin{aligned} |u_n - 1| &= \frac{|\cos n+\sin n|}{|n-\sin n|} \\ &\leq \frac{2}{n-1}. \end{aligned}$$
   Si on veut rendre $|u_n - 1| \leq 10^{-2}$, il suffit que $\dfrac{2}{n-1} \leq 10^{-2}$ c'est à dire $n \geq 201$.
   Alors, on peut prendre $N_0 = 201$.

b. Soit $u_n = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \frac{n}{n^2+j}$.

1. Remarquons que pour tout $1 \leq j \leq n$, on a $\dfrac{1}{n^2+n} \leq \dfrac{1}{n^2+j} \leq \dfrac{1}{n^2+1}$.
   Par suite $\dfrac{1}{n+1} = \dfrac{n}{n^2+n} \leq \dfrac{n}{n^2+j} \leq \dfrac{1}{n^2+1} \leq \dfrac{1}{n}$.
   Alors $\dfrac{n}{n+1} \leq \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \frac{n}{n^2+j} \leq \frac{n}{n} = 1$.
   Comme $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} \dfrac{n}{n+1} = 1 = \lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} 1$, donc d'après le théorème d'encadrement des gendarmes, la suite (u_n) est convergente vers 1.

2. Par la définition de la limite on a $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} u_n = 1$ ssi $\forall\varepsilon > 0, \exists N_0 \in \mathbb{N}/n \geq N_0 : |u_n - 1| < \varepsilon$.
   D'après ce qui précède, on a
   $$0 \leq 1 - u_n \leq 1 - \frac{n}{n+1} = \frac{1}{n+1}.$$
   Donc $|u_n - 1| = 1 - u_n$ et pour que rendre $|u_n - 1|$ inférieur à 10^{-2} il suffit que $\dfrac{1}{n+1} < 10^{-2}$.
   D'où $n \geq 99$. Alors on peut prendre $N_0 = 99$.

c. Soit $u_n = \dfrac{n+\sin n}{n-\cos n}$, $n \geq 2$.

1. Remarquons que $u_n = \dfrac{n\left(1+\dfrac{\sin n}{n}\right)}{n\left(1-\dfrac{\cos n}{n}\right)} = \dfrac{1+\dfrac{\sin n}{n}}{1-\dfrac{\cos n}{n}}$.

   Comme les suites $(\cos n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\sin n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont bornées et $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty}\dfrac{1}{n}=0$, alors $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} u_n = 1$.

2. Par définition de la limite on a $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} u_n = 1$ ssi $\forall\varepsilon>0, \exists N_0\in\mathbb{N}/n\geq N_0 : |u_n-1|<\varepsilon$.

   On a
   $$u_n - 1 = \frac{\sin n+\cos n}{n-\cos n}.$$
   Comme
   $$\begin{aligned}|\cos n+\sin n| &\leq |\cos n| + |\sin n|\\ &\leq 2.\end{aligned}$$
   Et pour $n\geq 2$,
   $$\begin{aligned}|n-\cos n| &\geq n-\cos n\\ &\geq n-|\cos n| \quad (\text{car } \cos n \leq |\cos(n)|\ )\\ &\geq n-1>0. \quad (\text{car } |\cos(n)|\leq 1\ ).\end{aligned}$$
   Donc
   $$|u_n-1|\leq \frac{2}{n-1}.$$
   Pour que $|u_n-1|\leq 10^{-2}$ soit inférieur à 10^{-2}, il suffit que $\dfrac{2}{n-1}\leq 10^{-2}$ c'est à dire $n\geq 201$.

   Alors, on peut prendre $N_0 = 201$.

d. $u_n = \dfrac{n}{n^2+n+1}+\dfrac{n}{n^2+n+2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2+2n}$.

1. Remarquons que pour tout $n+1\leq k\leq 2n$, on a $\dfrac{1}{n+2}=\dfrac{n}{n^2+2n}\leq\dfrac{n}{n^2+k}\leq\dfrac{n}{n^2+n+1}\leq\dfrac{1}{n}$.

   Alors $\dfrac{n}{n+2}\leq u_n=\displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{n}{n^2+k}\leq\frac{n}{n}=1$.

   Comme $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty}\dfrac{n}{n+2}=1=\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty}1$ donc, d'après le théorème d'encadrement des gendarmes on déduit que $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty}u_n=1$.

2. D'autre part et d'après ce qui précède on a $u_n\geq\dfrac{n}{n+2}$, alors $0\leq 1-u_n\leq 1-\dfrac{n}{n+2}=\dfrac{2}{n+2}$.

   Donc pour que $|u_n-1|=1-u_n$ soit inférieur à 10^{-2} il suffit que $\dfrac{2}{n+2}\leq 10^{-2}$ c'est à dire $n\geq 198$.

   Par conséquent, on peut prendre $N_0=198$.

13 Exercice corrigé 10

Énoncé

Étudier si les suites $(u_n)_{n\geq 0}$ définies ci-dessous possèdent une limite.

1) $u_n = \dfrac{n(-1)^n+1}{2n(-1)^n+3}$.
2) $u_n = e^{n(-1)^n}$.
3) $u_n = (-1)^n e^{-n}$.
4) $u_n = \cos(\pi\sqrt{n})$.
5) $u_n = \dfrac{n(-1)^n+2}{3n(-1)^n+1}$.

Solution

1) On a

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{n(-1)^n+1}{2n(-1)^n+3} \\ &= \frac{n\left[(-1)^n+\frac{1}{n}\right]}{n\left[2(-1)^n+\frac{3}{n}\right]} \\ &= \frac{(-1)^n\left[1+\frac{(-1)^n}{n}\right]}{(-1)^n\left[2+\frac{3}{n}(-1)^n\right]}. \end{aligned}$$

Comme la suite $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée et $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty}\frac{1}{n}=0$, alors

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty}\frac{(-1)^n}{n}=0 \quad \text{et} \quad \lim_{n\longrightarrow+\infty}\frac{3(-1)^n}{n}=0.$$

Par suite

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty}u_n=\frac{1}{2}.$$

2) $u_n=e^{n(-1)^n}$:
Remarquons que (u_n) admet deux sous-suites extraites :

$$\begin{aligned} u_{2n} &= e^{2n}, \\ u_{2n+1} &= e^{-2n-1}. \end{aligned}$$

De plus

$$\begin{aligned} \lim_{n\longrightarrow+\infty}u_{2n} &= +\infty, \\ \lim_{n\longrightarrow+\infty}u_{2n+1} &= 0. \end{aligned}$$

C'est-à-dire, les suites extraites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont convergentes vers deux limites différentes et par suite, on déduit d'après la conséquence1 que la suite (u_n) est divergente.

3 Soit $u_n=(-1)^ne^{-n}$:
Comme $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée et $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty}e^{-n}=0$, alors le produit de ces suites qui est (u_n) converge vers 0.

4) Soit $u_n=\cos(\pi\sqrt{n})$:
Remarquons que (u_n) admet une sous suite extraite :

$$u_{n^2}=\cos(\pi\, n)=(-1)^n,$$

qui est divergente (la suite $((-1)^n)$ n'admet pas de limite), alors d'après la conséquence1 on déduit que (u_n) est divergente.

5) Soit $u_n=\dfrac{n(-1)^n+2}{3n(-1)^n+1}$:
On a

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{n(-1)^n\left[1+\frac{2(-1)^n}{n}\right]}{n(-1)^n\left[3+\frac{(-1)^n}{n}\right]} \\ &= \frac{1+\frac{2(-1)^n}{n}}{3+\frac{(-1)^n}{n}}. \end{aligned}$$

Comme la suite $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée et $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty}\frac{1}{n}=0$, $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty}\frac{2}{n}=0$.
Alors $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty}\frac{(-1)^n}{n}=0$ et $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty}\frac{2(-1)^n}{n}=0$. Par conséquent $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty}u_n=\frac{1}{3}$.

14 Exercice corrigé 11

Énoncé

Calculer les limites des suites suivantes :

1) $u_n=\dfrac{\ln(n+\ln n)}{\ln(2n+\ln n)}$.
2) $u_n=\dfrac{3\sqrt{n}+2\sqrt{n+\sqrt{n}}+\sqrt[3]{n}}{\sqrt[4]{n^2+3}+2\sqrt{n+1}}$.
3) $u_n=\dfrac{1+\ldots+n}{n^2}$.
4) $u_n=\dfrac{1+3+9+\ldots+3^n}{3^{n+1}}$.
5) $u_n=n^3\,2^{-n}$.
6) $u_n=\dfrac{n^2+2^n}{2n+2^n}$.
7) $u_n=\dfrac{2^n}{n!}$.
8) $u_n=n^2\,a^{-\sqrt{n}},\ a\in\mathbb{R}_+^*$.

Solution

1) Remarquons que

$$\begin{aligned}\ln(n+\ln n) &= \ln(n(1+\frac{\ln n}{n}))\\ &= \ln(n)+\ln(1+\frac{\ln n}{n}).\end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned}\ln(2n+\ln n) &= \ln(2n(1+\frac{\ln n}{2n}))\\ &= \ln(2)+\ln(n)+\ln(1+\frac{\ln n}{2n}).\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}u_n &= \frac{\ln(n+\ln n)}{\ln(2n+\ln n)}\\ &= \frac{\ln(n)+\ln(1+\frac{\ln n}{n})}{\ln(2)+\ln(n)+\ln(1+\frac{\ln n}{2n})}\\ &= \frac{\ln(n)\left[1+\dfrac{\ln(1+\frac{\ln n}{n})}{\ln(n)}\right]}{\ln(n)\left[\dfrac{\ln(2)}{\ln(n)}+1+\dfrac{\ln(1+\frac{\ln n}{2n})}{\ln(n)}\right]}.\end{aligned}$$

Par suite

$$u_n = \frac{1 + \dfrac{\ln(1+\frac{\ln n}{n})}{\ln(n)}}{\frac{\ln(2)}{\ln(n)} + 1 + \dfrac{\ln(1+\frac{\ln n}{2n})}{\ln(n)}}.$$

Comme $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} \dfrac{\ln(n)}{n} = 0$, on déduit alors que $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} u_n = 1$.

2) On a

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{3\sqrt{n} + 2\sqrt{n+\sqrt{n}} + \sqrt[3]{n}}{\sqrt[4]{n^2+3} + 2\sqrt{n+1}} \\ &= \frac{3\sqrt{n} + 2\sqrt{n(1+\frac{\sqrt{n}}{n})} + \sqrt[3]{n}}{\sqrt[4]{n^2(1+\frac{3}{n^2})} + 2\sqrt{n(1+\frac{1}{n})}} \\ &= \frac{\sqrt{n}\left[3 + 2\sqrt{1+\frac{\sqrt{n}}{n}} + \frac{1}{n^{\frac{1}{6}}}\right]}{\sqrt{n}\left[\sqrt[4]{1+\frac{3}{n^2}} + 2\sqrt{1+\frac{1}{n}}\right]} \\ &= \frac{3 + 2\sqrt{1+\frac{\sqrt{n}}{n}} + \frac{1}{n^{\frac{1}{6}}}}{\sqrt[4]{1+\frac{3}{n^2}} + 2\sqrt{1+\frac{1}{n}}}. \end{aligned}$$

Alors $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} u_n = \dfrac{5}{3}$.

3) Soit $u_n = \dfrac{1+\cdots+n}{n^2}$:

Remarquons que le numérateur est une somme d'une suite numérique arithmétique, donc $1+\cdots+n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

Alors

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{n(n+1)}{2} \times \frac{1}{n^2} \\ &= \frac{n+1}{2n} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2n} \end{aligned}$$

Par suite

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} u_n = \frac{1}{2}.$$

4) Soit $u_n = \dfrac{1+3+9+\cdots+3^n}{3^{n+1}}$:

Remarquons que le numérateur est une somme d'une suite géométrique de raison 3, donc :

$$\begin{aligned} 1+3+9+\cdots+3^n &= \frac{3^{n+1}-1}{3-1} \\ &= \frac{3^{n+1}-1}{2}. \end{aligned}$$

Alors

$$u_n = \frac{3^{n+1}-1}{2\times 3^{n+1}} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\times 3^{n+1}}.$$

Par suite

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} u_n = \frac{1}{2}.$$

5) Soit $u_n = \dfrac{n^2+2^n}{2n+2^n}$:
Remarquons que :

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{2^n(n^2 2^{-n}+1)}{2^n(2^{1-n}n+1)} \\ &= \frac{n^2 2^{-n}+1}{2^{1-n}n+1}. \end{aligned}$$

Calculons $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} n^2 2^{-n}$ **:**
On a

$$\begin{aligned} \ln(n^2 2^{-n}) &= \ln(n^2)+\ln(2^{-n}) \\ &= 2\ln(n)-n\ln(2) \\ &= n(2\frac{\ln(n)}{n}-\ln(2)). \end{aligned}$$

Donc

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} \ln(n^2 2^{-n}) = -\infty.$$

Comme

$$n^2 2^{-n} = e^{\ln(n^2 2^{-n})}.$$

Donc

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} n^2 2^{-n} = 0.$$

Calculons $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty}(n\times\ 2^{1-n})$:
On a

$$\begin{aligned} \ln(n\times 2^{1-n}) &= \ln(n)+\ln(2^{1-n}) \\ &= \ln(n)+(1-n)\ln(2) \\ &= \ln(n)+\ln(2)-n\ln(2) \\ &= \ln(n)\left[1+\frac{\ln(2)}{\ln(n)}-\ln(2)\right] \\ &= -\infty. \end{aligned}$$

Comme

$$n\times 2^{1-n} = e^{\ln(n\times 2^{1-n})}.$$

Alors

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} n\times 2^{1-n} = 0.$$

En conséquence,

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} u_n = 1.$$

6) Soit $u_n = \dfrac{2^n}{n!}$:
Remarquons que

$$u_n = \frac{2^n}{2\times3\times4\times\cdots\times n}$$

Donc

$$\begin{aligned} \ln(\frac{2^n}{n!}) &= \ln(2^n)-\ln(n!) \\ &= \ln(2^n)-\ln(2\times3\times4\times\cdots\times n) \\ &= n\ln(2)-\ln(2\times3\times4\times\cdots\times n) \\ &= \underbrace{\ln(2)+\ln(2)+\ln(2)+\cdots+\ln(2)}_{\text{n fois}}-(\ln(2)+\ln(3)+\ln(4)+\cdots+\ln(n)) \\ &= \ln(2)+(\ln(2)-\ln(3))+(\ln(2)-\ln(4))+\cdots+(\ln(2)-\ln(n)). \end{aligned}$$

Remarquons que les termes $(\ln(2)-\ln(3))$, $(\ln(2)-\ln(4)), \cdots, (\ln(2)-\ln(n))$ forment une suite négative, décroissante qui tends vers $-\infty$.
Donc

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} \ln(\frac{2^n}{n!}) = -\infty.$$

Par suite

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} u_n = \lim_{n\longrightarrow+\infty} e^{\ln(\frac{2^n}{n!})} = 0.$$

7) $u_n = n^3\ 2^{-n}$:
On a

$$\begin{array}{rcl} \ln(n^3\ 2^{-n}) & = & \ln(n^3)+\ln(2^{-n}) \\ & = & 3\ln(n) - n\ln(2) \\ & = & n(3\frac{\ln(n)}{n} - \ln(2)). \end{array}$$

D'où

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} \ln(n^3\ 2^{-n}) = -\infty.$$

Alors

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} u_n = \lim_{n\longrightarrow+\infty} e^{\ln(n^3\ 2^{-n})} = 0.$$

8) Soit $u_n = n^2\ a^{-\sqrt{n}}$ tel que $a \in \mathbb{R}_+^*$:
On distingue les deux cas suivants
1^{er} cas :
Si $0 < a < 1$, on a

$$\begin{array}{rcl} \ln(n^2\ a^{-\sqrt{n}}) & = & 2\ln(n) - \sqrt{n}\ln(a) \\ & = & \sqrt{n}(2\frac{\ln(n)}{\sqrt{n}} - \ln(a)). \end{array}$$

Donc

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} \ln(n^2\ a^{-\sqrt{n}}) = +\infty.$$

Alors

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} u_n = \lim_{n\longrightarrow+\infty} e^{\ln(n^2\ a^{-\sqrt{n}})} = +\infty.$$

$2^{ème}$ cas :
Si $a > 1$, on a

$$\begin{array}{rcl} \ln(n^2\ a^{-\sqrt{n}}) & = & 2\ln(n) - \sqrt{n}\ln(a) \\ & = & \sqrt{n}(2\frac{\ln(n)}{\sqrt{n}} - \ln(a)). \end{array}$$

Donc

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} \ln(n^2\ a^{-\sqrt{n}}) = -\infty.$$

Par suite

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} u_n = \lim_{n\longrightarrow+\infty} e^{\ln(n^2\ a^{-\sqrt{n}})} = 0.$$