République Algérienne Démocratique Et Populaire

Ministère de L'enseignement Supérieur et De La Recherche Scientifique

Université de Mustapha Ben Boulaid -Batna 2

Faculté de Mathématiques et informatique

Département du socle commun Mathématiques et Informatique

2020-2021

Première Année MI-À distance

Module : Analyse1

Fiche de révision1:

Les nombres réels

Dans la première partie de cette fiche, nous allons mettre le vocabulaire principal introduit dans ce chapitre et dans la 2ème partie, nous présentons un rappel sur les nombres réels avec des exemples illustratifs. La 3ème partie est consacrée pour des exercices d'applications.

Réalisé par :

Mme Belkacem .K,

Mme Touil .A,

et Mme Merzougui .L.

Table des matières

Première partie

Interprétation en arabe des principaux termes Mathématiques introduit dans ce chapitre

Le cours	الدرس
TD (Travaux Dirigés)	الأعمال الموجهة
Rappel	تذكير
Série d'exercices	سلسة التمارين
chapitre	محور
Introduction	مقدمة
Théorème	نظرية
Axiome	مسلمة
Proposition	قضية
Hypothèse	فرضية
Définition	تعريف
Remarque	ملاحظة
On remarque, on constate	نلاحظ
Exemple	مثال
Conclusion	نتيجة
Propriété	خاصية
Lemme	توطئة
On note	نرمز
Notation	ترميز
On distingue	نميز
Cas	حالة
Dans ce cas	في هذه الحالة
Ci-dessus	أعلاه
Ci-dessous	أدناه
Respectivement	علي الترتيب
C'est à dire (c-à-d)	بمعنى
i.e	أي
Exercice	تمرين
Énoncé	نص التمرين
Question	سؤال
Réponse	جواب
Solution	الحل
Montrer que	أثبت أن
Démontrer que	بيّن أن
Démonstration	برهان
Prouver que	بيّن أن

Preuve	برهان، إثبات
Vérifier que	تحقق أن
Vérification	تحقيق، تحقق
Justifier	علل، برر
Justification	تعليل، تبرير
Déterminer	حدد
Trouver	أوجد
Calculer	أحسب
Opération	عملية
Usuelle	مألوفة
Addition	جمع
Multiplication	ضرب
Corps	حقل
Commutatif	تبديلي
Totalement ordonné	مرتب كليا
Partiellement ordonné	مرتب جزئيا
Relation	علاقة
Ordre	ترتيب
Réflexive	انعكاسية
Antisymétrique	ضد تناظرية
Transitive	متعدية
Partie	جزء
Non vide	غير خال
Soit, Soient	ليكن
On dit que	نقول أن
On considère	نعتبر
Aussi	أيضا
Pour tout	من أجل كل
Donc, alors	إذا
Majorant	حاد من الأعلى
Minorant	حاد من الأدنى
Unique	وحيد
Appartenir	ينتمي
Ensemble borné	مجموعة محدودة
Ensemble borné inférieurement	مجموعة محدودة من الأدنى

Ensemble borné supérieurement	مجموعة محدودة من الأعلى
Maximum (max)	أكبر عنصر
Minimum (min)	أصغر عنصر
Borne supérieure (sup)	حد أعلى
Borne inférieure (inf)	حد أدنى
Propriété de la borne supérieure	خاصية الحد الأعلى
Caractérisation de la borne supérieure	الخاصية المميزة للحد الأعلى

Déduire	استنتج
Déduction	استنتاج
répondez par vraie ou faux	أجب ب نعم أو لا
Les nombres réels	الأعداد الحقيقية
Ensemble	مجموعة
Muni	مزود

Deuxième partie

Rappel sur les nombres réels

1 Les ensembles usuels de nombres

On rappelle les notations usuelles pour les ensembles de nombres :
— $\mathbb{N}$ est l'ensemble des **entiers naturels positifs** $\{0, 1, 2, ...\}$.
— $\mathbb{Z}$ est l'ensemble des **entiers relatifs** $\{...., -2, -1, 0, 1, 2, ...\}$.
— $\mathcal{Q}$ est l'ensemble des **rationnelles**, i.e $\mathcal{Q} = \{\frac{a}{b}; a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N}\diagdown\{0\}\}$.
— $\mathbb{R}$ représente l'ensemble des **nombres réels** et l'on a les inclusions suivantes : $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathcal{Q} \subset \mathbb{R}$.
— L'ensemble $\mathbb{R} \setminus \mathcal{Q}$ est appelé l'ensemble des **irrationnelles**.
— Pour chacun de ces ensembles, l'ajout du signe $*$ signifie que l'on exclut 0 de l'ensemble : $\mathbb{N}^*, \mathbb{Z}^*, \mathcal{Q}^*$ et $\mathbb{R}^*$.

2 Axiomes des nombres réels

On sait que :

i) L'ensemble des réels $\mathbb{R}$ est muni des opérations usuelles et internes :
l'addition $+ : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \longmapsto x + y \in \mathbb{R}$ et la multiplication $\cdot : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \longmapsto x \cdot y \in \mathbb{R}$
constitue **un corps commutatif**, c'-à-d :

1) L'addition et la multiplication sont commutatives :

$$\forall x,\ y \in \mathbb{R} : x + y = y + x \quad et \quad x \cdot y = y \cdot x.$$

2) L'addition et la multiplication sont associatives :

$$\forall x,\ y\ z \in \mathbb{R} : x + (y + z) = (x + y) + z \quad et \quad x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z.$$

3) L'addition admet un élément neutre 0 tel que :

$$x + 0 = x, \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

et la multiplication admet un élément neutre 1 tel que :

$$x \cdot 1 = x, \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

4) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe $x' = -x \in \mathbb{R}$ tel que :

$$x + x' = 0.$$

et si $x \neq 0$, il existe $x^* = \frac{1}{x}$ tel que :

$$x.x^* = 1.$$

5) La multiplication est distributive par rapport à l'addition :

$$\forall x,\ y,\ z \in \mathbb{R} : \qquad x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z.$$

ii) Il y a une relation d'ordre total sur $\mathbb{R}$: **$\mathbb{R}$ muni de la relation usuelle "inférieur ou égal $\leq$" est totalement ordonné**. C'est à dire la relation $\leq$ vérifie les propriétés suivantes :

1. **$\leq$ est réflexive :**
En effet ; pour tout $x \in \mathbb{R},\ x \leq x$.
2. **$\leq$ est antisymétrique :**
En effet ; pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, si $x \leq y$ et $y \leq x$, alors, $x = y$.
3. **$\leq$ est transitive :** En effet ; pour tout x, y et z dans $\mathbb{R}$, si $x \leq y$ **et** $y \leq z$, alors $x \leq z$.
4. De plus, pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, on a ou bien $x \leq y$, ou bien $y \leq x$ (les éléments de $\mathbb{R}$ sont tous comparables).

iii)

Théorème 2.1. ***(Propriété d'Archimède)***
*$\mathbb{R}$ est **Archimédien** : pour tout $x, y \in \mathbb{R}$ avec $x > 0$; il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que : $nx > y$.*

iv)

Définition 2.2. ***(Valeur absolue d'un réel)***
Soit $x \in \mathbb{R}$. On définit la valeur absolue de x, notée $|x|$, par :

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0, \\ -x & \text{si } x \leq 0. \end{cases}$$

Proposition 2.3. ***(Propriétés de la valeur absolue d'un réel)***

(a) *Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :*
$|x| \geq 0$, $|x| = |-x|$, $|x| \geq x$, $|x| \geq -x$, $|x| = \max(-x, x)$ *et* $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

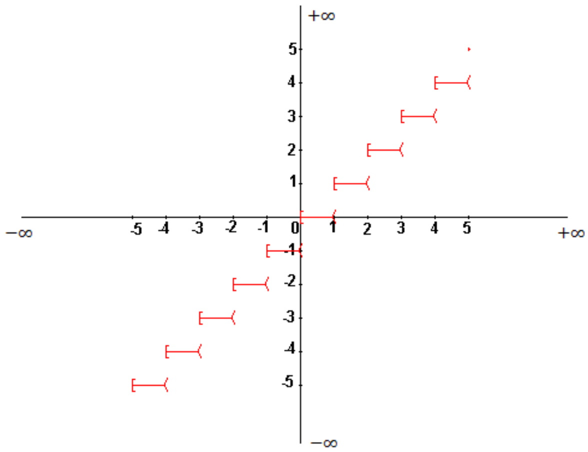
(b) *Pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, on a :*
$|xy| = |x||y|$, $|x| \leq \alpha \Longleftrightarrow -\alpha \leq x \leq +\alpha; (\alpha \geq 0)$, $\Big||x| - |y|\Big| \leq |x + y| \leq |x| + |y|$ *et* $\Big||x| - |y|\Big| \leq |x - y| \leq |x| + |y|$.

v)

Définition 2.4. ***(Partie entière d'un réel)***
*Soit $x \in \mathbb{R}$, **le plus grand entier inférieur ou égal à** x s'appelle **la partie entière de** x. Nous le noterons $E(x)$ ou bien $[x]$.*

Exemple 2.5. $E(\pi) = 3$, $E(-\pi) = -4$, $E(0) = 0$, $E(\frac{1}{2}) = 0$, $E(1,5) = 1$, $E(-0,5) = -1$ *et* $E(-\frac{3}{2}) = -2$.

Définition 2.6. ***(Fonction partie entière)***
*La fonction partie entière notée **E**, est définie par* $E : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & E(x) \end{array}$



Théorème 2.7. ***(Propriétés de la fonction partie entière)***

1) *Par définition même, on a :*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \begin{cases} E(x) \in \mathbb{Z}, \\ E(x) \leq x < E(x) + 1. \end{cases}$$

2) *La partie entière d'un nombre réel est unique.*

3) *Si $x \in \mathbb{R}$, $E(x) + 1$ **est le plus petit entier vérifiant :***

$$x < E(x)+1.$$

4) ***La fonction partie entière** est **croissante** sur $\mathbb{R}$, i.e*

$$\forall x,\ y \in \mathbb{R} : \qquad x \leq y \Longrightarrow E(x) \leq E(y).$$

4) La fonction partie entière vérifie :

$$\forall x \in \mathbb{R} : \quad E(x+1) = E(x) + 1.$$

5) Pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, on a :

$$E(x) + E(y) \leq E(x+y) \leq E(x) + E(y) + 1.$$

vi)

Théorème 2.8. ***(Densité des nombres rationnels et irrationnels dans $\mathbb{R}$)***

— $\mathbb{Q}$ ***est dense dans*** $\mathbb{R}$: $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$ *c-à-d ; pour tout x, $y \in \mathbb{R}$ tel que $x < y \in \mathbb{R}$, il existe $q \in \mathbb{Q}$ tel que : $x < q < y$ (entre tout deux nombres réels, il existe un nombre rationnel).*

— $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ***est dense dans*** $\mathbb{R}$: $\overline{\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}} = \mathbb{R}$ *(entre tout deux nombres réels, il existe un nombre irrationnel).*

Remarques 2.9. *(a)* ***L'ensemble des nombres entiers naturels $\mathbb{N}$ n'est pas dense dans $\mathbb{R}$*** *; par exemple il n'existe pas de nombre naturel entre les deux réels 2 et 3.*

(b) Ainsi, ***l'ensemble des nombres entiers relatifs*** *$\mathbb{Z}$ n'est pas dense dans $\mathbb{R}$; par exemple il n'existe pas de nombre entier relatif entre les deux réels -1 et -2.*

vii)

Définition 2.10. ***(Intervalles de $\mathbb{R}$)***

(a) Soit $I \subseteq \mathbb{R}$. On dit que I est un intervalle de $\mathbb{R}$ si pour tout $x, y \in \mathbb{R}$ on a : $\forall r \in \mathbb{R}$, $x \leq r \leq y \Rightarrow r \in I$.

(b) Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que : $a < b$.

i. L'ensemble $\{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$ est appelé ***intervalle fermé*** *de $\mathbb{R}$ et il est noté par $[a, b]$.*

ii. L'ensemble $\{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$ est appelé ***intervalle ouvert à gauche et fermé à droite*** *de $\mathbb{R}$ et il est noté par $]a, b]$.*

iii. L'ensemble $\{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$ est appelé ***intervalle ouvert à droite et fermé à gauche*** *de $\mathbb{R}$ et il est noté par $[a, b[$.*

iv. L'ensemble $\{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$ est appelé ***intervalle ouvert*** *de $\mathbb{R}$ et il est noté par $]a, b[$.*

v. L'ensemble $\{x \in \mathbb{R} : x < a\}$ est appelé ***intervalle ouvert à droite et non borné à gauche*** *de $\mathbb{R}$ et il est noté par $]-\infty, a[$.*

vi. L'ensemble $\{x \in \mathbb{R} : a < x\}$ est appelé ***intervalle ouvert à gauche et non borné à droite*** *de $\mathbb{R}$ et il est noté par $]a, +\infty[$.*

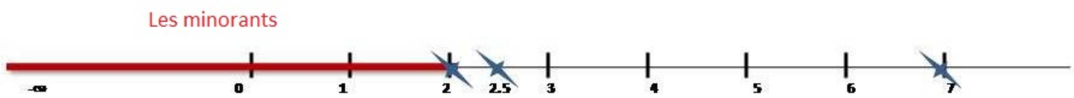
3 Rappel sur le vocabulaire de base (majorant, minorant, ensemble borné, maximum, minimum, borne supérieure et borne inférieure)

Définition 3.1. ***(Majorant, minorant)*** *Soient A une partie non vide de $\mathbb{R}$ ($\varnothing \neq A \subset \mathbb{R}$) et $m, M \in \mathbb{R}$.*

1. *On dit que m est un minorant de A, si $\forall x \in A : x \geq m$.*
2. *On dit que M est un majorant de A, si $\forall x \in A : x \leq M$.*

Exemple 3.2. *Dans $(\mathbb{R}, \leq)$, on considère l'ensemble $A = \{2, \frac{5}{2}, 7\}$.*
Remarquons que :

a. $2 \leq 2$, $2 \leq \frac{5}{2}$ *et* $2 \leq 7$, *alors 2 est un minorant de A.*
Aussi $1 \leq 2$, $1 \leq \frac{5}{2}$ et $1 \leq 7$, donc 1 est un autre minorant de A.



Alors, on constate que, pour tout $m \in]-\infty, 2]$; m est un minorant de A.

b. $2 \leq 7$, $\frac{5}{2} \leq 7$ *et* $7 \leq 7$, *donc 7 est un majorant de A.*
Aussi $2 \leq 8$, $\frac{5}{2} \leq 8$ et $7 \leq 8$, alors 8 est un autre majorant de A.

Donc, pour tout $M \in [7, +\infty[$, M est un majorant de A.

Exemple 3.3. *Soit $I\!N = \{0, 1, 2, \cdots\}$ l'ensemble des entiers naturels. Remarquons que :*
Pour tout $x \in I\!N$; $\mathrm{x} \geq 0$, c-à-d 0 est un minorant de $I\!N$, mais comme : $\forall n \in I\!N, \mathrm{n} \leq \mathrm{n} + 1$ nous déduisons que l'ensemble $I\!N$ n'admet pas de majorants.

Exemple 3.4. *Soit $A =]0, 1[= \{x \in \mathbb{R}$ tel que $: 0 < x < 1\}$.*
Remarquons que :

a. $\forall x \in A : x > 0$, alors 0 est un minorant de A. De plus, $\forall m \in] - \infty, 0]$; m est un minorant de A.

b. $\forall x \in A : x < 1$, alors 1 est un majorant de A. De plus, $\forall M \in [1, +\infty[$, M est un majorant de A.

Remarque 3.5.

1. *En général, le majorant et le minorant ne sont pas uniques. (Voir les exemples (3.2), (3.3) et (3.4)).*
2. *Le majorant et le minorant d'un ensemble peuvent appartenir ou non à A. (Voir les exemples (3.2), (3.3) et (3.4)).*

Définition 3.6. *(**Ensemble borné**)*
Soit $\phi \neq A \subset \mathbb{R}$.

1. *On dit que l'ensemble A est **minoré (ou borné inférieurement)** dans $\mathbb{R}$, si A **admet au moins un minorant** dans $\mathbb{R}$, c'est à dire :*
$$\exists m \in \mathbb{R},\ \forall x \in A : x \geq m.$$
2. *On dit que l'ensemble A est **majoré (ou borné supérieurement)** dans $\mathbb{R}$, si A **admet au moins un majorant** dans $\mathbb{R}$, c'est à dire :*
$$\exists M \in \mathbb{R},\ \forall x \in A : x \leq M.$$
3. *On dit que l'ensemble A est **borné** dans $\mathbb{R}$, s'il est **majoré et minoré** dans $\mathbb{R}$, c'est à dire :*
$$\exists m, M \in \mathbb{R},\ \forall x \in A : m \leq x \leq M.$$

Exemple 3.7.
1. *L'ensemble $A = \{2, \frac{5}{2}, 7\}$ est borné dans $\mathbb{R}$ car : $\forall x \in A : 1 \leq x \leq 8$.*
2. *L'ensemble $I\!N$ est minoré (borné inférieurement) par 0 mais n'est pas majoré (n'est pas borné supérieurement).*
3. *L'ensemble $B = \{\cos x,\ x \in \mathbb{R}\}$ est borné. En effet,*
Tout d'abord, remarquons que : $B = \{-1, \cdots, 0, \cdots, 1\} = [-1, 1]$.
— *B est majoré par 1 (puisque pour tout $x \in B$, $\cos x \leq 1$).*
— *B est minoré par -1 (puisque pour tout $x \in B$, $\cos x \geq -1$).*

Définition 3.8. *(**Le minimum et le maximum d'un ensemble**)*
Soit $\varnothing \neq A \subset \mathbb{R}$.

1. *On dit que m est **le plus petit élément (minimum)** de A, si m est **un minorant de A** et $m \in A$. On le note par $\min A$.*
$$m = \min A \Longleftrightarrow \begin{cases} 1.\ \forall x \in A : x \geq m, \\ 2.\ m \in A. \end{cases}$$

2. *On dit que M est* ***le plus grand élément (maximum)*** *de A, si M est* ***un majorant de*** *A et $M \in A$. On le note par $\max A$.*

$$M = \max A \Longleftrightarrow \begin{cases} 1.\ \forall x \in A : x \leq M, \\ 2.\ M \in A. \end{cases}$$

Exemple 3.9. 1. *On considère l'ensemble $A = \{2, \frac{5}{2}, 7\}$, on a :*

a. $\min A = 2$, *car 2 est minorant de A et $2 \in A$.*

b. $\max A = 7$, *car 7 est un majorant de A et $7 \in A$.*

2. *Soit $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \cdots\}$.*

a. $\min \mathbb{N} = 0$ *car 0 est un minorant de $\mathbb{N}$ et $0 \in \mathbb{N}$.*

b. $\max \mathbb{N}$ *n'existe pas, car $\mathbb{N}$ n'est pas majoré.*

3. *Soit $C =]0, 1[$.*

a. $\min C$ *n'existe pas, car il n'existe pas de minorant de A qui appartient à C.*

b. $\max C$ *n'existe pas, car il n'existe pas de majorant de A qui appartient à C.*

Remarques 3.10. 1. *Si $\min A$ existe, il est unique.*

2. *Si $\max A$ existe, il est unique.*

3. *Un ensemble peut ne pas avoir d'éléments minimum ou maximum. Par exemple $A =]0, 1[$.*

Définition 3.11. ***(Borne supérieure et borne inférieure)***

1. *On dit que M est* ***la borne supérieure*** *de A si M est un majorant de A et M est le plus petit des majorants de A. Si la borne supérieure de A existe, on la note par $\sup A$. C'est à dire $\sup A = \min\{M; M$ est un majorant de $A\}$.*

2. *On dit que m est* ***la borne inférieure*** *de A si m est un minorant de A et m est le plus grand des minorants de A. Si la borne inférieure de A existe, on la note par $\inf A$. C'est à dire $\inf A = \max\{m; m$ est un minorant de $A\}$.*

Exemple 3.12. 1. *Soit l'ensemble $A = \{2, \frac{5}{2}, 7\}$, on a*

a. *L'ensemble des minorants de A est $]-\infty, 2]$ et comme $\inf A$ représente le plus grand des minorants de A, alors : $\inf A = 2$ et dans ce cas : $\inf A = \min A = 2$ (puisque $2 \in A$).*

b. *L'ensemble des majorants de A est $[7, +\infty[$ et comme $\sup A$ représente le plus petit des majorants de A, alors : $\sup A = 7$ et dans ce cas : $\sup A = \max A = 7$ (puisque $7 \in A$).*

2. *Soit $B =]2, 3[$, on a*

a. *L'ensemble des minorants de B est $]-\infty, 2]$ et comme $\inf B$ représente le plus grand des minorants de B, alors : $\inf B = 2$, (dans ce cas $minB$ n'existe pas).*

b. *L'ensemble des majorants de B est $[3, +\infty[$ et comme $\sup B$ représente le plus petit des majorants de B, alors : $\sup B = 3$, (dans ce cas $maxB$ n'existe pas).*

Remarque 3.13.

i) *Pour parler du $\sup$ (resp $\inf$), il faut que notre ensemble soit majoré (resp minoré).*

ii) *$\inf A$ et $\sup A$ peuvent appartenir ou non à l'ensemble A, comme le montre les exemples ci-dessus.*

Lemme 3.14.

— $\inf A$ *est un minorant de A.*
— $\inf A \in A \Longrightarrow \min A$ *existe et* $\min A = \inf A$.
— $\min A$ *existe* $\Longrightarrow \inf A$ *existe et* $\min A = \inf A$.
— $\inf A \notin A \Longrightarrow \min A$ *n'existe pas.*

— $\sup A$ *est majorant de A.*
— $\sup A \in A \Longrightarrow \max A$ *existe et* $\max A = \sup A$.
— $\max A$ *existe* $\Longrightarrow \sup A$ *existe et* $\max A = \sup A$.
— $\sup A \notin A \Longrightarrow \max A$ *n'existe pas.*

Exemple 3.15.

1. *Soit $A = [0, 1[$, on a :*
— $\min A$ *existe et égale à 0, alors $\inf A$ existe et $\inf A = \min A = 0$.*

— $\inf A = 0 \in A$, *alors* $\min A = \inf A = 0$.
— $\sup A = 1 \notin A$, *alors* $\max A$ *n'existe pas.*

2. *Soit* $B =]-1, 5]$, *on a :*
   — $\inf B = -1 \notin B$, *alors* $\min B$ *n'existe pas.*
   — $\sup B = 5 \in B$, *alors* $\max B$ *existe et* $\max B = \sup B = 5$.
   — $\max B = 5$ *existe, alors* $\sup B$ *existe et* $\max B = \sup B = 5$.

Théorème 3.16. ***(Propriétés de la borne supérieure et de la borne inférieure)***
— *Dans* $\mathbb{R}$, ***toute partie non vide et majorée admet une borne supérieure.***
— *Dans* $\mathbb{R}$, ***toute partie non vide et minorée admet une borne inférieure.***

Théorème 3.17. ***(Caractérisation de la borne supérieure et de la borne inférieure dans*** $\mathbb{R}$***)***

$$\mathit{1.}\ M = \sup A \Longleftrightarrow \begin{cases} 1.\ \forall x \in A : x \leq M \ (M \text{ est un majorant}). \\ 2.\ \forall \alpha < M; \exists y \in A | \alpha < y \ (\text{Tout nombre plus petit que } M \text{ n'est pas un majorant de } A). \end{cases}$$

Ceci est équivalent à dire que :

$$M = \sup A \Longleftrightarrow \begin{cases} 1.\ \forall x \in A : x \leq M. \\ 2.\ \forall \varepsilon > 0, \exists x_\varepsilon \in A | M - \varepsilon < x_\varepsilon. \end{cases}$$

$$\mathit{2.}\ m = \inf A \Longleftrightarrow \begin{cases} 1.\ \forall x \in A : x \geq m \ (m \text{ est un minorant}). \\ 2.\ \forall \beta > m; \exists z \in A | \beta > z \ (\text{Tout nombre plus grand que } m \text{ n'est pas un minorant de } A). \end{cases}$$

Ceci est équivalent à dire que :

$$m = \inf A \Longleftrightarrow \begin{cases} 1.\ \forall x \in A : x \geq m. \\ 2.\ \forall \varepsilon > 0, \exists y_\varepsilon \in A | m + \varepsilon > y_\varepsilon. \end{cases}$$

Lemme 3.18. *Soient* A *et* B *deux parties non vide bornées de* $\mathbb{R}$. *Alors,*

1. $A \cup B$ *est bornée.*
2. $\sup(A \cup B) = \max(\sup A, \sup B)$ *et* $\inf(A \cup B) = \min(\inf A, \inf B)$.

Ainsi,

1. $A \cap B$ *est bornée.*
2. $\sup(A \cap B) \leq \min(\sup A, \sup B)$ *et* $\inf(A \cap B) \geq \max(\inf A, \inf B)$.

Lemme 3.19. *1.* $\sup[a, b] = \max[a, b] = b$ *et* $\inf[a, b] = \min[a, b] = a$.

2. $\sup]a, b] = \max]a, b] = b$, $\inf]a, b] = a$ *et* $\min]a, b]$ *n'existe pas.*
3. $\sup[a, b[= b$, $\max[a, b[$ *n'existe pas et* $\inf[a, b[= \min[a, b[= a$.
4. $\sup]a, b[= b$, $\inf]a, b[= a$ *et* $\max]a, b[, \min]a, b[$ *n'existent pas.*
5. $]-\infty, a[$ *n'est pas borné inférieurement, alors* $\inf]-\infty, a[$ *et* $\min]-\infty, a[$ *n'existent pas. De plus,* $\sup]-\infty, a[= a$ *et* $\max]-\infty, a[$ *n'existe pas.*
6. $]a, +\infty[$ *n'est pas borné supérieurement, alors,* $\sup]a, +\infty[, \max]a, +\infty[$ *n'existent pas. De plus,* $\inf]a, +\infty[= a$ *et* $\min]a, +\infty[$ *n'existe pas.*

Troisième partie

Entrainements

Dans cette partie, nous allons résoudre des exercices types portant sur les nombres réels. Avant de commencer, voici les points du chapitre qu'il faut connaitre absolument :

— **Propriétés fondamentales des réels.**
— **$(\mathbb{R}, \leq)$ est un ensemble totalement ordonné.**
— **$\mathbb{R}$ est Archimédien.**
— **Entre deux réels, il y a toujours un rationnel.**
— **Définition et propriétés de la partie entière.**
— **Définition d'un majorant, d'un minorant, d'un ensemble borné, d'un max, d'un min, d'un sup et d'un inf.**
— **Unicité du max, min, sup et inf.**
— **Savoir déterminer le sup, l'inf, le min et le max d'un sous-ensemble de $\mathbb{R}$.**
  a) **Si on arrive à déterminer le max, avec la méthode du point suivant, alors le sup est le max. Sinon, il faut :**
    — **Conjecturer la valeur M du sup.**
    — **Montrer que M est un majorant.**
    — **Considérer un autre majorant M' et montrer que : $M' \geq M$.**
  b) **Si le sup a été déterminé avec la méthode précédente, il suffit de regarder si le sup est dans l'ensemble. Si c'est le cas c'est un max. Si le sup n'a pas été déterminé, on cherche un majorant qui se trouve dans l'ensemble. S'il en existe un, c'est forcément le max.**
— **Pour résoudre un exercice, on se procède comme suit :**
  1. **Lire attentivement l'énoncé de l'exercice.**
  2. **Déterminer les hypothèses données et les questions.**
  3. **Réflexion préalable au brouillons.**
  4. **Relever les objets qui apparaissent et leurs définitions. Par exemple si l'exercice porte sur la borne sup et la borne inf; il faut tout d'abord rappeler ces définitions.**

4 Exercice corrigé 1 (Application de la propriété d'Archimède dans $\mathbb{R}$)

Énoncé

1. Question de cours : Énoncé la propriété d'Archimède dans $\mathbb{R}$.
2. Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que : $\frac{1}{n} < a < n$.

Solution

1. Pour tout $x, y \in \mathbb{R}$ avec $x > 0$, il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que : $nx > y$.
2. Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$, en appliquant la propriété d'Archimède pour $x = a > 0$ et $y = 1$ on obtient : $\exists n_1 \in \mathbb{N}^* | \mathrm{n_1 a} > 1$.
   D'où, $\exists n_1 \in \mathbb{N}^* | \mathrm{a} > \frac{1}{\mathrm{n_1}}$.
   D'autre part, appliquons la propriété d'Archimède pour $x = 1 > 0$ et $y = a \in \mathbb{R}$ on obtient $\exists n_2 \in \mathbb{N}^* | \mathrm{n_2} > \mathrm{a}$.
   Posons $n = max(n_1, n_2)$ c'est à dire $n \geq n_1$ et $n \geq n_2$.
   On trouve : $a > \frac{1}{n_1} > \frac{1}{n} \Longleftrightarrow a > \frac{1}{n}$ et $a < n_2 \leq n \Longleftrightarrow a < n$.
   Alors, on déduit que : $\exists n = max(n_1, n_2) \in \mathbb{N}^*$ tel que $\frac{1}{n} < a < n$.

5 Exercice corrigé 2 (Valeur absolue)

Enoncé :

1. Question de cours : Donner la définition de la valeur absolue puis énoncé litérairement ses propriétés.

2. Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$.
   (a) Montrer que $|a+b| = |a| + |b|$ ssi a et b sont tous deux positifs ou tous deux négatifs.
   (b) Déduire que $|a-b| = |a-c| + |b-c|$ ssi $a \leq c \leq b$ ou $b \leq c \leq d$.

Solution

1. Voir la deuxième partie : Rappel sur les nombres réels (Axiomes de $\mathbb{R}$).
2. Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$.
   (a) Supposons que : $|a+b| = |a| + |b|$.
   En élevant au carré les deux membres de l'egalité ci-dessus, on obtient $(|a+b|)^2 = (|a|+|b|)^2$. Donc $(a+b)^2 = |a|^2 + |b|^2 + 2|a||b|$.
   Ce qui implique que : $a^2 + b^2 + 2ab = a^2 + b^2 + 2|a||b|$.
   Alors, $|ab| = ab$. C'est à dire $ab > 0$.
   D'où, ou bien a et b sont tous deux positifs ou tous deux négatifs.
   Inversement, supposons que a et b sont tous deux positifs ou tous deux négatifs. On distingue deux cas :
   Cas 1 : si $a > 0$ et $b > 0$.
   Alors, $|a| = a, |b| = b, a+b > 0$ et $|a+b| = a+b$. Donc $|a+b| = a+b = |a|+|b|$.
   Cas 2 : si $a < 0$ et $b < 0$.
   Alors, $|a| = -a, |b| = -b, a+b < 0$ et $|a+b| = -(a+b)$. Donc $|a+b| = -(a+b) = -|a|-|b| = (-a)+(-b) = |a|+|b|$.
   (b) Déduction :
   Appliquons le résultat obtenu dans la question a. pour $b-c$ et $c-a$ on obtient : $(b-c)$ et $(c-a)$ sont tous les deux positifs ou tous les deux négatifs ssi
   $$|(b-c)+(c-a)| = |b-c| + |c-a|. \tag{1}$$
   Mais comme $a \leq c \leq b \Longleftrightarrow b-c \geq 0$ et $c-a \geq 0$ et $b \leq c \leq a \Longleftrightarrow b-c \leq 0$ et $c-a \leq 0$ alors l'expression (1) est équivalente à : $a \leq c \leq b$ ou $b \leq c \leq a$ ssi $|b-a| = |b-c| + |c-a|$.
   Par conséquent : $a \leq c \leq b$ ou $b \leq c \leq a$ ssi $|a-b| = |b-c| + |a-c|$.

6 Exercice corrigé 3 (Partie entière)

Enoncé

1. Soit x un nombre réel quelconque. Donner la définition de la partie entière de x, notée $E(x)$.
2. Montrer qu'il existe un $N > 0$ tel que : $x - N < E(x) \leq x$; $\forall x \in \mathbb{R}$.
3. En utilisant la question 2; montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0,\ 1$, on a : $\left(\frac{E(x)}{x}\right)^2 \leq \frac{E(x)}{x}$ et $\left(\frac{E(x)}{x-1}\right)^2 > \frac{E(x)}{x-1}$.

Solution

1. La partie entière de $x \in \mathbb{R}$ est l'unique nombre entier $E(x)$ tel que $E(x) \leq x < E(x)+1$.
2. Comme $E(x) \leq x < E(x)+1$ alors, $E(x) \leq x$ et $x-1 < E(x)$. Donc, il suffit de prendre $N = 1 > 0$ et on trouve, pour tout $x \in \mathbb{R},\ x - N < E(x) \leq x$.
3. D'après la question 2. on sait que : $x - 1 < E(x) \leq x$.
   - Si on divise $E(x) \leq x$ par x, on obtient : $\frac{E(x)}{x} \leq 1$. D'où, $\left(\frac{E(x)}{x}\right)^2 \leq \frac{E(x)}{x}$.
   - Si on divise $x-1 < E(x)$ par $x-1$, on obtient : $1 < \frac{E(x)}{x-1}$. Donc, $\frac{E(x)}{x-1} < \left(\frac{E(x)}{x-1}\right)^2$.

7 Exercice corrigé 4

Énoncé

Étant donné un ensemble $A \subset \mathbb{R}$, écrire avec des quantificateurs les propriétés suivantes :

(1) 10 est un majorant de A.

(2) m est un minorant de A.

(3) p n'est pas un majorant de A.

(4) A est majoré.

(5) A n'est pas minoré.

(6) A est borné.

(7) A n'est pas borné.

Solution

L'objective de l'exercice est d'exprimer les assertions ci-dessus en formulations mathématiques.

(1) Par définition, M est un majorant de A ssi : $\forall x \in A, \quad x \leq M$. Alors, En appliquant cette définition pour $M = 10$, on trouve :
10 est un majorant de A ssi : $\quad \forall x \in A : x \leq 10$.

(2) Par définition :
m est un minorant de A ssi : $\quad \forall x \in A : x \geq m$.

(3) "p n'est pas un majorant de A" est la négation de l'expression : "p est un majorant de A", c'-à-d :

$$\begin{aligned} \text{p n'est pas un majorant de A} \quad & ssi \quad \overline{\text{p est un majorant de A}} \\ & ssi \quad \overline{\forall x \in A : x \leq p} \\ & ssi \quad \exists x \in A : x > p. \end{aligned}$$

(4) Par définition, A est majoré ssi A admet au moins un majorant, donc la formulation Mathématique équivalente à cette expression est :

$$\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in A : \quad x \leq M.$$

(5) "A n'est pas minoré" est la négation de l'expression "A est minoré", donc :

$$\begin{aligned} \text{A n'est pas minoré} \quad & ssi \quad \overline{\text{A est minoré}} \\ & ssi \quad \overline{\exists m \in \mathbb{R}, \forall x \in A : \quad x \geq m} \\ & ssi \quad \forall m \in \mathbb{R}, \exists x \in A : x < m. \end{aligned}$$

(6) Par définition, on a :

$$\begin{aligned} \text{A est borné} \quad & \Longleftrightarrow \quad \text{A est majoré } \textbf{et} \text{ A est minoré} \\ & \Longleftrightarrow \quad (\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in A : x \leq M) \wedge (\exists m \in \mathbb{R}, \forall x \in A : x \geq m) \\ & \Longleftrightarrow \quad \exists m,\ M \in \mathbb{R}, \forall x \in A : m \leq x \leq M. \end{aligned}$$

(7) "A n'est pas borné" est la négation de l'expression "A est borné"

$$\begin{aligned} \text{A n'est pas borné} \quad & \overset{Ques6}{\Longleftrightarrow} \quad \overline{\exists m,\ M \in \mathbb{R}, \forall x \in A : m \leq x \leq M} \\ & \Longleftrightarrow \quad \forall m,\ M \in \mathbb{R}, \exists x \in A : m > x \vee x > M. \end{aligned}$$

8 Exercice corrigé 5 (Sous ensemble d'un ensemble borné)

Énoncé

Soient A et B deux parties non vides de $\mathbb{R}$ tells que $A \subset B$. Supposons que B est bornée.

1. Pourquoi $\sup B$ et $\inf B$ existent.
2. Montrer que A est bornée.
3. Montrer que $\sup A \leq \sup B$ et $\inf B \leq \inf A$.

Solution

1. Comme l'ensemble B est borné, alors, par définition B est majoré et minoré. D'après la propriété de la borne supérieure, $\sup B$ existe et d'après la propriété de la borne inférieure $\inf B$ existe.
2. Montrons que A est borné
   Comme B est borné alors, $\exists m, M \in \mathbb{R} / \ \forall x \in B, \ m \leq x \leq M$.
   Soit $x \in A$, comme $A \subset B$ donc $x \in B$ et par suite :
   $\exists m, M \in \mathbb{R}, \ m \leq x \leq M$, c-à-d : il existe au moins un minorant et un majorant de l'ensemble A. D'où, A est borné.
3. — Montrons que $\sup A \leq \sup B$
   D'après la question 2, comme l'ensemble A est borné donc $\sup A$ existe (d'après la propriété de la borne supérieure). De plus, pour tout $x \in A$, $x \in B$ (comme $A \subset B$). Ce qui implique que $x \leq \sup B$. Donc, $\sup B$ est un majorant de A et comme $\sup A$ est le plus petit des majorants de A, on déduit que : $\sup A \leq \sup B$.
   — Montrons que $\inf B \leq \inf A$
   D'après la question 2, comme l'ensemble A est borné donc $\inf A$ existe (d'après la propriété de la borne inférieure). De plus, pour tout $x \in A$, $x \in B$ (comme $A \subset B$). Ce qui implique que $x \geq \inf B$. Donc, $\inf B$ est un minorant de A et comme $\inf A$ est le plus grand des minorants de A, on déduit que : $\inf A \leq \inf B$.

9 Exercice corrigé 6 (Union de deux ensembles bornés)

Énoncé

1. Soient $a, b \in \mathbb{R}$.
   (a) Montrer que :
   $$(x \leq a \ \vee \ x \leq b) \Longrightarrow (x \leq \max(a, b)).$$
   (b) Montrer que :
   $$(x \geq a \ \vee \ x \geq b) \Longrightarrow (x \geq \min(a, b)).$$
2. Soient $\varnothing \neq A \subset \mathbb{R}$ et $\varnothing \neq B \subset \mathbb{R}$ tels que A et B sont bornés.
   (a) Montrer que $A \cup B$ est borné.
   (b) Montrer que $\sup(A \cup B) = \max(\sup A, \sup B)$ et $\inf(A \cup B) = \min(\inf A, \inf B)$.

Solution

1. Soient $a, b \in \mathbb{R}$.
   (a) Montrons que : $(x \leq a \ \vee \ x \leq b) \Longrightarrow (x \leq \max(a, b))$.
   On utilise le raisonnement par disjonction des cas :
   • Si $a \leq b$ alors, $max(a, b) = b$. Donc :
   $$\left\{\begin{array}{l} \bullet \text{ Si } x \leq a \\ \bullet \text{ Si } x \leq b \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} \bullet \ x \leq a \leq b = \max(a, b). \\ \bullet \ x \leq b = \max(a, b). \end{array}\right.$$
   D'où, si $a \leq b$, on a : $(x \leq a \ \vee \ x \leq b) \Longrightarrow (x \leq \max(a, b))$.
   • Si $b \leq a$ alors, $max(a, b) = a$. Donc
   $$\left\{\begin{array}{l} \bullet \text{ Si } x \leq a \\ \bullet \text{ Si } x \leq b \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} \bullet \ x \leq a = \max(a, b). \\ \bullet \ x \leq b \leq a = \max(a, b). \end{array}\right.$$
   D'où, si $b \leq a$, on a : $(x \leq a \ \vee \ x \leq b) \Longrightarrow (x \leq \max(a, b))$.

   (b) Montrons que : $(x \geq a \ \vee \ x \geq b) \Longrightarrow (x \geq \min(a, b))$.
   On utilise le raisonnement par disjonction des cas :
   • Si $a \leq b$ alors, $\min(a, b) = a$. Donc :
   $$\left\{\begin{array}{l} \bullet \text{ Si } x \geq a \\ \bullet \text{ Si } x \geq b \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} \bullet \ x \geq a = \min(a, b). \\ \bullet \ x \geq b \geq a = \min(a, b). \end{array}\right.$$

D'où, si $a \leq b$, on a : $(x \geq a \ \vee \ x \geq b) \Longrightarrow (x \geq \min(a,b))$.
• Si $b \leq a$ alors, $\min(a,b) = b$. Donc :

$$\begin{cases} \bullet \text{ Si } x \geq a \\ \bullet \text{ Si } x \geq b \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \bullet \ x \geq a \geq b = \min(a,b). \\ \bullet \ x \geq b = \min(a,b). \end{cases}$$

D'où, si $b \leq a$, on a : $(x \geq a \ \vee \ x \geq b) \Longrightarrow (x \geq \min(a,b))$.

2. Soient A et B deux parties non vides et bornées de $\mathbb{R}$.
• Montrons que l'ensemble $A \cup B$ est borné.
Soit $x \in A \cup B$, donc $x \in A$ ou $x \in B$. Par suite,

$$\inf A \leq x \leq \sup A \text{ ou } \inf B \leq x \leq \sup B.$$

Alors,

$$\begin{cases} x \leq \sup A \vee x \leq \sup B, \\ \qquad et \\ x \geq \inf A \vee x \geq \inf B. \end{cases}$$

D'après la question 1, on déduit que :

$$\min(\inf A, \inf B) \leq x \leq \max(\sup A, \sup B).$$

C-à-d, $A \cup B$ admet un majorant : $\max(\sup A, \sup B)$ et un minorant : $\min(\inf A, \inf B)$. Par conséquent, $A \cup B$ est borné.
• Montrons que : $\sup(A \cup B) = \max(\sup A, \sup B)$
Soit $x \in A \cup B$. Comme $\max(\sup A, \sup B)$ est un majorant de $A \cup B$ et $\sup(A \cup B)$ est le plus petit des majorants de $A \cup B$, alors,

$$\sup(A \cup B) \leq \max(\sup A, \sup B). \tag{2}$$

D'autre part, comme $A \subset A \cup B$ et $B \subset A \cup B$, donc d'après l'exercice 5, on déduit que :

$$\begin{cases} \bullet \ \sup(A) \leq \sup(A \cup B). \\ \qquad \wedge \\ \bullet \ \sup(B) \leq \sup(A \cup B). \end{cases}$$

D'où,

$$\max(\sup A, \sup B) \leq \sup(A \cup B). \tag{3}$$

Insérant les inégalités (2) et (3), on obtient :

$$\sup(A \cup B) = \max(\sup A, \sup B).$$

• Montrons que $\inf(A \cup B) = \min(\inf A, \inf B)$
Soit $x \in A \cup B$. Comme $\min(\inf A, \inf B)$ est un minorant de $A \cup B$ et $\inf(A \cup B)$ est le plus grand des minorants de $A \cup B$ alors,

$$\min(\inf A, \inf B) \leq \inf(A \cup B). \tag{4}$$

D'autre part, comme $A \subset A \cup B$ et $B \subset A \cup B$, donc d'après l'exercice 5, on déduit que :

$$\begin{cases} \bullet \ \inf(A \cup B) \leq \inf A. \\ \qquad \wedge \\ \bullet \ \inf(A \cup B) \leq \inf B. \end{cases}$$

D'où,

$$\inf(A \cup B) \leq \min(\inf A, \inf B). \tag{5}$$

Insérant les inégalités (4) et (5), on trouve :

$$\inf(A \cup B) = \min(\inf A, \inf B).$$

10 Exercice corrigé 7 (Intersection de deux ensembles bornés)

Énoncé

1. Soient $a, b \in \mathbb{R}$.
   (a) Montrer que
   $$(x \leq a \ \wedge \ x \leq b) \Longrightarrow (x \leq \min(a,b)).$$
   (b) Montrer que
   $$(x \geq a \ \wedge \ x \geq b) \Longrightarrow (x \geq \max(a,b)).$$
2. Soient $\varnothing \neq A \subset \mathbb{R}$ et $\varnothing \neq B \subset \mathbb{R}$ tels que A et B sont bornés et $A \cap B \neq \varnothing$.
   (a) Montrer que $A \cap B$ est borné.
   (b) Montrer que $\sup(A \cap B) \leq \min(\sup A, \sup B)$ et $\inf(A \cap B) \geq \max(\inf A, \inf B)$.
3. Supposons que $A = \{-1, 1, 2, 3\}$ et $B = \{0, 1, 2, 4\}$.
   (a) Calculer $\sup(A \cap B)$ et $\min(\sup A, \sup B)$.
   (b) Est ce que $\sup(A \cap B) = \min(\sup A, \sup B)$.
   (c) Calculer $\inf(A \cap B)$ et $\max(\inf A, \inf B)$.
   (d) Est ce que $\inf(A \cap B) = \max(\inf A, \inf B)$.
4. Que peut on déduire ?

Solution

1. Soient $a, b \in \mathbb{R}$.
   (a) Montons que $(x \leq a \ \wedge \ x \leq b) \Longrightarrow x \leq \min(a,b)$.
   On utilise le raisonnement par disjonction des cas :
   • Si $a \leq b$ alors, $\min(a,b) = a$. Donc $x \leq a \wedge x \leq b \Longrightarrow x \leq a = \min(a,b)$.
   • Si $b \leq a$ alors, $\min(a,b) = b$. Donc $x \leq a \wedge x \leq b \Longrightarrow x \leq b = \min(a,b)$.
   (b) Montons que : $(x \geq a \ \wedge \ x \geq b) \Longrightarrow x \geq \max(a,b)$.
   • Si $a \leq b$ alors, $\max(a,b) = b$. Donc $x \geq a \wedge x \geq b \Longrightarrow x \geq b = \max(a,b)$.
   • Si $b \leq a$ alors, $\max(a,b) = a$. Donc $x \geq a \wedge x \geq b \Longrightarrow x \geq a = \max(a,b)$.

   (a) Montrons que $A \cap B$ est borné.
   Soit $x \in A \cap B$, donc $x \in A$ et $x \in B$. Alors,
   $$\inf A \leq x \leq \sup A \wedge \inf B \leq x \leq \sup B.$$
   C-à-d :
   $$[x \geq \inf A \wedge x \geq \inf B] \wedge [x \leq \sup A \wedge x \leq \sup B].$$
   En appliquant le résultat de la question 1, on obtient :
   $$\max(\inf A, \inf B) \leq x \leq \min(\sup A, \sup B).$$
   Alors, $A \cap B$ admet un majorant : $\min(\sup A, \sup B)$ et un minorant $\max(\inf A, \inf B)$. D'où, $A \cap B$ est borné.
   (b) Montrons que $\sup(A \cap B) \leq \min(\sup A, \sup B)$.
   Comme $\min(\sup A, \sup B)$ est un majorant de $A \cap B$ et $\sup(A \cap B)$ est le plus petit des majorants de $A \cap B$. Alors,
   $$\sup(A \cap B) \leq \min(\sup A, \sup B)$$
   Ainsi, comme $\max(\inf A, \inf B)$ est un minorant de $A \cap B$ et $\inf(A \cap B)$ est le plus grand des minorants de $A \cap B$, alors
   $$\inf(A \cap B) \geq \max(\inf A, \inf B)$$
   (c) Soient $A = \{-1, 1, 2, 3\}$ et $B = \{0, 1, 2, 4\}$. Donc, $A \cap B = \{1, 2\}$
      i. On a :
      $$\sup(A \cap B) = 2, \sup A = 3, \sup B = 4 \text{et} \min(\sup A, \sup B) = 3.$$
      ii. Non, $\sup(A \cap B) \neq \min(\sup A, \sup B)$.
      iii.
      $$\inf(A \cap B) = 1, \inf A = -1, \inf B = 0 \text{et} \max(\inf A, \inf B) = 0.$$
      iv. Non, $\inf(A \cap B) \neq \max(\inf A, \inf B)$.
   (d) En général, $\sup(A \cap B) \neq \min(\sup A, \sup B)$ et $\inf(A \cap B) \neq \max(\inf A, \inf B)$.

11 Exercice corrigé 8 (Calcul min, max, sup et inf)

Énoncé

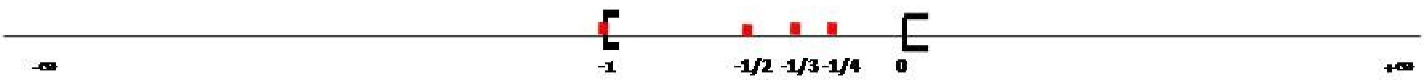
Étudier le minimum, maximum, borne supérieure, borne inférieure de l'ensemble

$$A = \left\{ -\frac{1}{n},\ n \in \mathbb{N}^* \right\}.$$

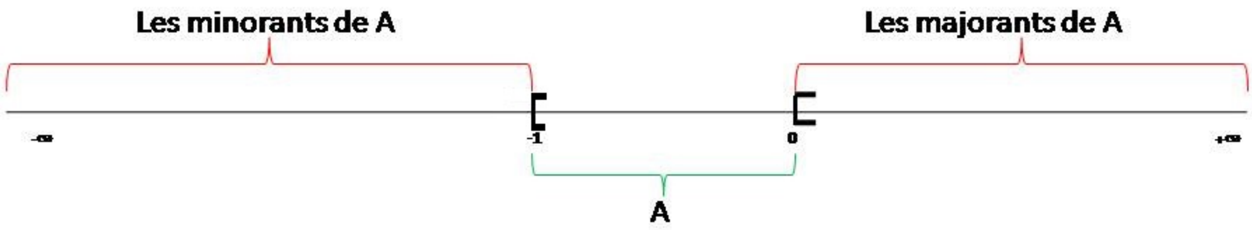
Solution

Caractérisons les éléments de A.

$$\begin{aligned} A &= \left\{ -\frac{1}{n},\ n \in \mathbb{N}^* \right\}, \\ &= \left\{ -\frac{1}{n},\ n = 1, 2, 3, 4, ... \right\} \\ &= \left\{ -\frac{1}{1}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, ... \right\} \\ &= \left\{ -1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, ... \right\}. \end{aligned}$$



On rappelle que : $\sup A$ est le plus petit des majorants de A, $\inf A$ est le plus grand des minorants de A, $\max A$ est un majorant de A qui appartient à A et $\min A$ est un minorant de A qui appartient à A. Donc, il faut tout d'abord déterminer les majorants et les minorants de A.



Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\begin{aligned} n \geq 1 &\implies \frac{1}{n} \leq 1 \\ &\implies -\frac{1}{n} \geq -1. \end{aligned}$$

Donc,

$$\forall n \in \mathbb{N}^* : \quad -\frac{1}{n} > -1.$$

C'est à dire : **Tout les éléments de A sont supérieure ou égal à -1.**
Donc, **-1 est un minorant de A**, et **comme** $-1 \in A$ alors, $-1 = \min A$. Par suite $\inf A = \min A = -1$.

Conjecturer la valeur de $supA$:

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\quad -\frac{1}{n} < 0$.
C'est à dire, **Tout les éléments de A sont inférieure strictement de 0.** Donc, 0 est un majorant de A. De plus pour tout $M \in [0, +\infty[$, M est un majorant de A et comme 0 représente le plus petit des majorants de A alors $\sup A = 0$ et comme $0 \notin A$ alors $\max A$ n'existe pas.

Démonstration Mathématiques que $supA = 0$:

1^{re} **Méthode :** D'après ce qui précède, on sait que 0 est un majorant de A, donc il reste à montrer que 0 est le plus petit des majorants de A.
Par l'absurde supposons qu'il existe $M \in \mathbb{R}$, un majorant de A tel que : $M < 0$ (c-à-d 0 n'est pas le plus petit des majorants).
En appliquant la propriété d'Archimède pour $x = -M > 0$ et $y = 1$ on obtient :

$$\exists n \in \mathbb{N}^* \ \text{ tel que : } -nM > 1.$$

Donc,

$$\exists n \in \mathbb{N}^* \ \text{ tel que : } M < -\frac{1}{n}.$$

Ce qui contredit que M est un majorant de A. Par suite l'hypothèse de départ est fausse et alors on déduit que : $supA = 0$.

2^{me} **Méthode** On utilise **la caractérisation de la borne supérieure**

$$\sup A = 0 \iff \forall \varepsilon > 0, \exists x \in A : \qquad 0 - \varepsilon < x. \tag{6}$$

Et comme les éléments de A sont caractérisés par la relation : $x \in A$ ssi $\exists n \in \mathbb{N}^* : x = -\frac{1}{n}$.
Alors, démontrer (6) revient exactement à démontrer l'expression suivante :

$$\forall \epsilon > 0, \exists n \in \mathbb{N}^* : \qquad -\varepsilon < -\frac{1}{n}.$$

Cela nous suggère de commencer la démonstration par " Soit $\varepsilon > 0$", comme pour toute démonstration débutant par un quantificateur universel.

Soit $\varepsilon > 0$, on cherche l'existence d'un entier naturel $n \in \mathbb{N}^*$, vérifiant : $-\varepsilon < -\dfrac{1}{n}$.
c'-à-d :

$$\varepsilon > \frac{1}{n}.$$

D'où ; on cherche l'existence d'un entier naturel $n \in \mathbb{N}^*$ tel que : $n > \dfrac{1}{\varepsilon}$. Choisissons $n = E(\dfrac{1}{\varepsilon}) + 1$, où : **E** désigne **la partie entière**.
Par suite,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon = E(\frac{1}{\varepsilon}) + 1 \in \mathbb{N}^* : -\varepsilon < -\frac{1}{n}.$$

Par conséquent, $\sup A = 0$ et comme $\sup A = 0 \notin A$, alors, $\max A$ n'existe pas.

12 Exercice corrigé 9 (Calcul min, max, inf et sup)

Énoncé

Soit $A = [-1, 3[\cap \mathbb{Q}$. Étudier $\max A$, $\min A$, $\sup A$, et $\inf A$.
De même pour $B = \{3n; n \in \mathbb{N}\}$ et $C = \left\{1 - \dfrac{1}{n}; n \in \mathbb{N}^*\right\}$.

Solution

a) Soit $A = [-1, 3[\cap \mathbb{Q}$:
Tout d'abord, il faut caractériser les éléments de A. Comme A représente l'intersection de l'ensemble $\mathbb{Q}$ et l'intervalle $[-1, 3[$, alors, pour que x soit un élément de A, il faut que x soit un nombre rationnel et que $x \in [-1, 3[$, d'où :

$$A = \{x \in \mathbb{Q}, -1 \leq x \leq 3\}.$$

Remarque importante : $A \subset [-1, 3[$, mais $A \neq [-1, 3[$. On constate que pour tout $x \in A; x \geq -1$, -1 est un minorant de A et comme $-1 \in A (-1 \in \mathbb{Q} et -1 \in [-1, 3[)$ alors, $-1 = \min A$. Par suite, $\inf A = \min A = -1$.

Conjecturer la valeur de $\sup A$

Ainsi, on constate que pour tout $x \in A; x < 3$, alors, 3 est un majorant de A.
De plus, pour tout $M \in [3, +\infty[$, M est un majorant de A et 3 représente le plus petit des majorants de A, donc $\sup A = 3$, et comme $\sup A = 3 \notin A$ ($3 \notin [-1, 3[$), alors $\max A$ n'existe pas.

Démonstration Mathématique que $\sup A = 3$

1^{re} Méthode Supposons par l'absurde qu'il existe $M \in \mathbb{R}$, un majorant de A tel que : $M < 3$ (c-à-d 3 n'est pas le plus petit des majorants). Donc, $3 - M > 0$. Appliquons la propriété d'Archimède pour $x = 3 - M > 0$ et $y = 1 \in \mathbb{R}$, on obtient :

$$\exists n \in \mathbb{N}^* \quad \text{tel que} : n(3 - M) > 1.$$

Ce qui implique que :

$$\exists n \in \mathbb{N}^* \quad \text{tel que : } M < 3 - \frac{1}{n}.$$

Comme :

$3 - \dfrac{1}{n} = \dfrac{3n-1}{n} \in \mathcal{Q}.$

$3 - \dfrac{1}{n} < 3.$

$n \geq 1 \Longrightarrow -\dfrac{1}{n} \geq -1 \Longrightarrow 3 - \dfrac{1}{n} \geq 2.$

Alors, $3 - \dfrac{1}{n} \in \mathcal{Q} \bigcap [2, 3[$. D'où, $3 - \dfrac{1}{n} \in A$. (C-à-d, on a trouvé un élément de A supérieur strictement de M). Ce qui contredit que M est un majorant de A, alors, l'hypothèse initiale est fausse. C-à-d 3 est le plus petit des majorants de A et par conséquent : $\sup A = 3$.

2^{me} **Méthode** On utilise la caractérisation de la borne supérieure :

$$\sup A = 3 \iff \forall \varepsilon > 0, \exists x \in A : 3 - \varepsilon < x < 3.$$

Soit $\varepsilon > 0$, on distingue les deux cas suivants :

1^{er} **cas :** Si $0 < \varepsilon < 4$

$$\begin{aligned} 0 < \varepsilon < 4 \quad &\Rightarrow \quad -4 < -\varepsilon < 0 \\ &\Rightarrow \quad -1 < 3 - \varepsilon < 3. \end{aligned}$$

Donc, on cherche l'existence d'un $x \in \mathbb{Q} \cap [-1, 3[$ tel que :

$$3 - \varepsilon < x < 3 \quad et \quad 3 - \varepsilon > -1.$$

Alors, il suffit de prendre n'importe quel point $x_0 \in \mathbb{Q}$ tel que : $3 - \varepsilon < x_0 < 3$.

$2^{ème}$ **cas :** Si $\varepsilon > 4$

$$\begin{aligned} \varepsilon > 4 \quad &\Rightarrow \quad -\varepsilon < -4 \\ &\Rightarrow \quad 3 - \varepsilon < -1. \end{aligned}$$

Donc, on cherche l'existence d'un $x \in [-1, 3[\cap \mathbb{Q}$ tel que :

$$x > 3 - \varepsilon \quad et \quad 3 - \varepsilon < -1.$$

Alors, dans ce cas il suffit de prendre n'importe quel point $x \in \mathbb{Q}$ tel que : $-1 \leq x < 3$.

D'après ce qui précède, on déduit que $\sup A = 3$. Mais comme $\sup A = 3 \notin A = [-1, 3[\cap\mathbb{Q}$, alors $\max A$ n'existe pas.

b) Soit $B = \{3n;\ n \in \mathbb{N}\}$. Caractérisons les éléments de B :

$$\begin{aligned} B &= \{3n;\ n \in \mathbb{N}\} \\ &= \{3n, n = 0, 1, 2, 3, ...\} \\ &= \{0, 3, 6, 9, ...\}\,. \end{aligned}$$

Remarquons que pour tout $x \in B$; $x \geq 0$, alors 0 est un minorant de B, de plus, comme $0 \in B$, donc : $\min B = 0$ et par suite $\inf B = \min B = 0$.

Conjecturer la valeur de $\sup B$

D'autre part, comme pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $3n \geq 3(n+1)$ (l'ensemble $\mathbb{N}$ n'est pas majoré). Alors, L'ensemble B n'est pas borné supérieurement (**on ne peut pas parler sur** $\sup B, \max B$ **tant que l'ensemble B n'est pas majoré**), par suite $\max B$, $\sup B$ n'existent pas.

Démonstration Mathématique que l'ensemble B n'est pas majoré ($\sup B, \max B$ n'existent pas)

On utilise le raisonnement par l'absurde pour montrer que l'ensemble B n'est pas majoré.
Par l'absurde, supposons que B est majoré ; c-à-d :

$$\exists M \in \mathbb{R} : 3n \leq M, \forall n \in \mathbb{N}.$$

D'où :

$$\exists M \in \mathbb{R} : n \leq \frac{M}{3}, \forall n \in \mathbb{N}.$$

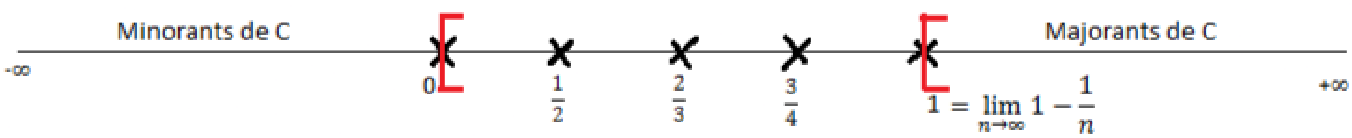
Donc,

$$\exists \alpha = \frac{M}{3} \in \mathbb{R} : n < \alpha,\ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Ce qui implique que $\mathbb{N}$ est borné supérieurement (contradiction mathématique), alors, l'ensemble B n'est pas majoré et par suite $\sup B, \max B$ n'existent pas.

c) Soit l'ensemble $C = \left\{1 - \frac{1}{n};\ n \in \mathbb{N}\right\}$. Caractérisons les éléments de C

$$\begin{aligned} C =& \left\{1 - \frac{1}{n};\ n = 1, 2, 3 \cdots\right\} \\ =& \left\{1 - \frac{1}{1}, 1 - \frac{1}{2}, 1 - \frac{1}{3}, 1 - \frac{1}{4}, \cdots\right\} \\ =& \left\{0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \cdots\right\}. \end{aligned}$$



Remarquons que pour tout $x \in C$; $x \geq 0$ et comme $0 \in C$, alors, 0 est un minorant de C, donc, $\min C = 0$ et par suite $\inf C = \min C = 0$.

Conjecturer la valeur de $\sup C$

D'autre part, comme pour tout $x \in C$, nous avons : $\exists n \in \mathbb{N}^*$ tel que : $x = 1 - \frac{1}{n} < 1$. Donc, 1 est un majorant de C. De plus, pour tout $M \in [1, +\infty[$, M est un majorant de C et comme 1 représente le plus petit des majorants de C alors, $\sup C = 1$ et comme $1 \notin C$ on déduit que $\max C$ n'existe pas.

Démonstration Mathématique que $\sup C = 1$

On utilise la caractérisation de la borne supérieure :

$$\sup C = 1 \Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0,\ \exists x \in C; 1-\varepsilon < x.$$

D'après la définition de l'ensemble C, on a :

$$\sup C = 1 \Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0,\ \exists n \in \mathbb{N}^*; 1-\varepsilon < 1-\frac{1}{\mathrm{n}}.$$

Soit $\varepsilon > 0$, on cherche qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que : $1-\varepsilon < 1-\frac{1}{n}$.
On a :

$$\begin{aligned} 1-\varepsilon < 1-\frac{1}{n} &\Longrightarrow -\varepsilon < -\frac{1}{n} \\ &\Longrightarrow \varepsilon > \frac{1}{n} \\ &\Longrightarrow n > \frac{1}{\varepsilon}. \end{aligned}$$

Donc, il suffit de prendre $n = E(\frac{1}{\varepsilon})+1$ (E désigne **la partie entiére**). Ceci étant, on a bien sur $1-\varepsilon < 1-\frac{1}{n}$. Alors, $\sup C = 1$ et comme $1 \notin C$, on déduit que $\max C$ n'existe pas.

13 Exercice corrigé 10 (Calcul du max, min, sup, inf)

Énoncé

Étudier le maximum, minimum, la borne supérieure et la borne inférieure de l'ensemble $A = \left\{\frac{2n+(-1)^n}{n+1},\ n \in \mathbb{N}\right\}$.

Solution

On sait que :

$$(-1)^n = \begin{cases} -1 & \text{si } n = 2p+1;\ p \in \mathbb{N}.(\text{n est impaire}). \\ +1 & \text{si } n = 2p;\ p \in \mathbb{N}.(\text{n est paire}). \end{cases}$$

Alors, on représente les éléments de A comme suit :

$$\begin{aligned} A &= \left\{\frac{2(2p)+1}{2p+1}, \frac{2(2p+1)-1}{2p+1+1};\ p \in \mathbb{N}\right\} \\ &= \left\{\frac{4p+1}{2p+1}, \frac{4p+1}{2p+2};\ p \in \mathbb{N}\right\} \\ &= \left\{\frac{4p+1}{2p+1}, \frac{4p+1}{2p+2};\ p = 0,1,2,3,\cdots\right\} \\ &= \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{5}{3}, \frac{5}{4}, \frac{9}{5}, \frac{9}{6}, \cdots\right\}. \end{aligned}$$

Posons :

$$\begin{aligned} A_1 &= \left\{\frac{4p+1}{2p+1};\ p \in \mathbb{N}\right\} = \left\{1, \frac{5}{3}, \frac{9}{5}, \ldots\right\}, \\ A_2 &= \left\{\frac{4p+1}{2p+2};\ p \in \mathbb{N}\right\} = \left\{\frac{1}{2}, \frac{5}{4}, \frac{9}{6}, \ldots\right\}. \end{aligned}$$

Alors, $A = A_1 \cup A_2$.
On rappelle que : (voir le lemme (3.18) ; deuxième partie).
Si B et C deux parties non vide bornées de $\mathbb{R}$, alors :

- $B \cup C$ est borné.
- $\sup(B \cup C) = \max(\sup B,\ \sup C)$ et $\inf(B \cup C) = \min(\inf B,\ \inf C)$.

Donc, pour étudier $\sup A,\ \inf A$, il suffit de déterminer $\sup A_1$, $\sup A_2$, $\inf A_1$ et $\inf A_2$.

- On considère l'ensemble A_1 :
  Remarquons que pour tout $p \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} 4p \geq 2p &\Longrightarrow 4p+1 \geq 2p+1 \\ &\Longrightarrow \frac{4p+1}{2p+1} \geq 1. \end{aligned}$$

Donc, 1 est un minorant de A_1, c-à-d A_1 est minoré et comme $1 \in A_1$ alors, $\min A_1 = 1$ et par suite $\inf A_1 = \min A_1 = 1$.
D'autre part, pour tout $p \in \mathbb{N}$ on a :

$$\begin{aligned} 4p+1 < 4p+2 \Longrightarrow \quad \frac{4p+1}{2p+1} &< \frac{4p+2}{2p+1} \\ &= \frac{2(2p+1)}{2p+1} \\ &= 2. \end{aligned}$$

Alors, 2 est un majorant de A_1 donc, A_1 est majoré. Reste à montrer que : $2 = \sup A_1$. Pour cela nous utilisons la caractérisation de la borne supérieure :

$$2 = \sup A_1 \Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0,\ \exists x \in A_1 \quad \text{tel que : } 2 - \varepsilon < x.$$

Par définition des éléments de l'ensemble A, cette expression est équivalente à :

$$2 = \sup A_1 \Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0,\ \exists p \in \mathbb{N} | 2 - \varepsilon < \frac{4p+1}{2p+1}.$$

Soit $\varepsilon > 0$, on cherche l'existence d'un entier naturel p vérifiant : $2 - \varepsilon < \frac{4p+1}{2p+1}$. On a :

$$\begin{aligned} 2 - \varepsilon < \frac{4p+1}{2p+1} &\Longrightarrow -\varepsilon < \frac{-1}{2p+1} \\ &\Longrightarrow \varepsilon > \frac{1}{2p+1} \\ &\Longrightarrow \frac{1}{\varepsilon} < 2p+1 \\ &\Longrightarrow \frac{1}{\varepsilon} - 1 < 2p \\ &\Longrightarrow \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon} < 2p \\ &\Longrightarrow \frac{1-\varepsilon}{2\varepsilon} < p. \end{aligned}$$

Donc, il suffit de prendre p n'importe quel entier naturel supérieure strictement à $\frac{1-\varepsilon}{2\varepsilon}$. Ceci étant, on aura : $\sup A_1 = 2$.

— Maintenant on considère l'ensemble A_2. Remarquons que pour tout $p \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned} 4p+1 \geq p+1 \Longrightarrow \frac{4p+1}{2p+2} &\geq \frac{p+1}{2p+2} \\ &= \frac{p+1}{2(p+1)} \\ &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Donc, $\frac{1}{2}$ est un minorant de A_2 c-à-d A_2 est minoré et comme $\frac{1}{2} \in A_2$ alors, $\min A_2 = \frac{1}{2}$ et par suite $\inf A_2 = \min A_2 = \frac{1}{2}$.
D'autre part, pour tout $p \in \mathbb{N}$ on a :

$$\begin{aligned} 4p+1 < 4p+4 &\Longrightarrow \frac{4p+1}{2p+2} < \frac{4p+4}{2p+2} \\ &\Longrightarrow \frac{4p+1}{2p+2} < \frac{2(2p+2)}{2p+2} \\ &= 2. \end{aligned}$$

Alors, 2 est un majorant de A_2, donc A_2 est majoré. Reste à montrer que : $2 = \sup A_2$.
Par la caractérisation de la borne supérieure, on sait que :

$$2 = \sup A_2 \Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0,\ \exists p \in \mathbb{N} | 2 - \varepsilon < \frac{4p+1}{2p+2}.$$

Soit $\varepsilon > 0$, on cherche l'existence d'un entier naturel p vérifiant : $2 - \varepsilon < \dfrac{4p+1}{2p+2}$.
On a :

$$\begin{aligned} 2-\varepsilon < \frac{4p+1}{2p+2} &\Longrightarrow -\varepsilon < \frac{4p+1}{2p+2} - 2 \\ &\Longrightarrow -\varepsilon < \frac{-3}{2p+2} \\ &\Longrightarrow \varepsilon > \frac{3}{2p+2} \\ &\Longrightarrow \frac{\varepsilon}{3} > \frac{1}{2p+2} \\ &\Longrightarrow \frac{3}{\varepsilon} < 2p+2 \\ &\Longrightarrow \frac{3}{\varepsilon} - 2 < 2p \\ &\Longrightarrow \frac{3}{2\varepsilon} - 1 < p \\ &\Longrightarrow \frac{3-2\varepsilon}{2\varepsilon} < p. \end{aligned}$$

Donc, il suffit de prendre $p = \max(0, E(\dfrac{3-2\varepsilon}{2\varepsilon}))$. D'où $\sup A_2 = 2$.
Finalement, on déduit d'après le lemme (3.18) que : $A = A_1 \cup A_2$ est borné. De plus,

$$\sup A = \max(\sup A_1, \sup A_2) = \max(2, 2) = 2.$$

Et

$$\inf A = \min(\inf A_1, \inf A_2) = \min(\frac{1}{2}, 1) = \frac{1}{2}.$$

14 Exercice corrigé 11 (Ensemble minoré, majoré et borné)

Énoncé

Pour chacune des parties suivantes de $\mathbb{R}$ dire si elle est majorée, minorée et bornée. Si oui, donner sa borne supérieure et ou sa borne inférieure.

1. $A = \Big\{x \in \mathbb{R},\ 0 < x < \sqrt{3}\Big\}$.
2. $B = \Big\{x \in \mathbb{R},\ \frac{1}{2} \leq \sin x < \frac{\sqrt{3}}{2}\Big\}$.
3. $C = \Big\{x \in \mathbb{R},\ x^3 > 3\Big\}$.
4. $D = \Big\{x \in \mathbb{R},\ e^x < \dfrac{1}{2}\Big\}$.
5. $E = \Big\{x \in \mathbb{R}, \text{ il existe } .p \in \mathbb{N}^*\text{tel que : x} = \dfrac{\sqrt{2}}{\text{p}}\Big\}$.

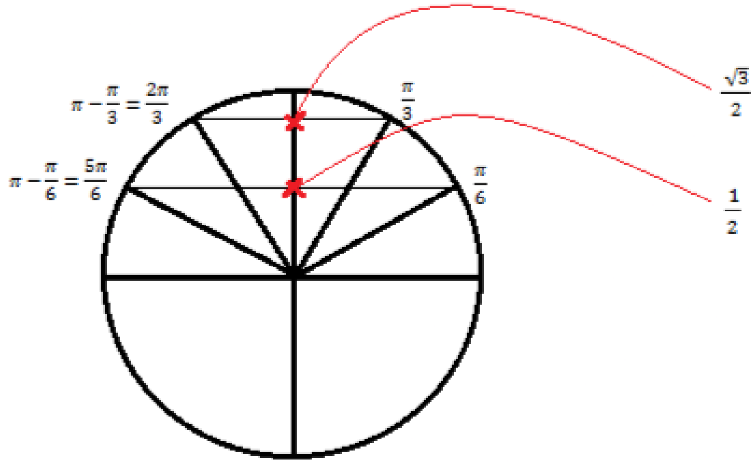
Solution

1. On a : $A = \Big\{x \in \mathbb{R},\ 0 < x < \sqrt{3}\Big\} =]0, \sqrt{3}[$.

Remarquons que pour tout $x \in \mathbb{R}; x > 0$ alors, 0 est un minorant de A. De plus pour tout $m \in]-\infty, 0]$, m est un minorant de A donc, A est minoré.

Ainsi, pour tout $x \in A$; $x < \sqrt{3}$ alors, $\sqrt{3}$ est un majorant de A. De plus, pour tout $M \in [\sqrt{3}, +\infty[$, M est un majorant de A. D'où A est majoré. Par suite A est borné.
$\sup A = \sqrt{3}$ (Voir la 2^{eme} partie lemme 3.19).
$\inf A = 0$ (comme 0 représente le plus grand des minorants de A).

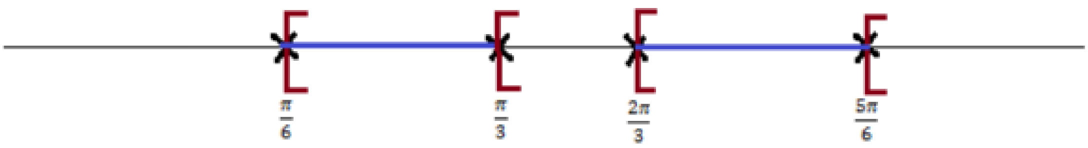
2. Soit $B = \left\{x \in \mathbb{R},\ \frac{1}{2} \leq \sin x < \frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$.



Comme $\sin\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{1}{2}$, $\sin\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin(\pi - \dfrac{\pi}{6}) = \sin(\dfrac{5\pi}{6}) = \dfrac{1}{2}$ et $\sin(\pi - \dfrac{\pi}{3}) = \sin(\dfrac{2\pi}{3}) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Alors,

$$B = \left\{x \in \mathbb{R},\ \frac{\pi}{6} \leq x < \frac{\pi}{3}\right\} \cup \left\{x \in \mathbb{R},\ \frac{2\pi}{3} \leq x < \frac{5\pi}{6}\right\} = [\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}[\cup[\frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{6}[.$$

Posons : $B_1 = [\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}[$ et $B_2 =]\frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{6}]$.



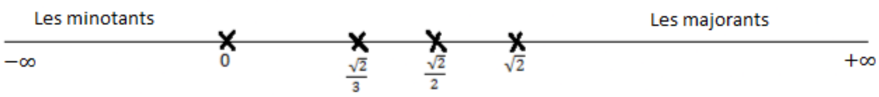
D'après le lemme 3.19, on a :
— L'ensemble B_1 est borné tel que : $\sup B_1 = \dfrac{\pi}{3}$ et $\inf B_1 = \min B_1 = \dfrac{\pi}{6}$.
— L'ensemble B_2 est borné tel que : $\sup B_2 = \max B_2 = \dfrac{5\pi}{6}$ et $\inf B_1 = \dfrac{2\pi}{3}$.
Alors, d'après le lemme (3.18) ; B est borné, de plus : $\sup B = \max(\sup B_1, \sup B_2) = \frac{5\pi}{6}$ et $\inf B = \min(\inf B_1, \inf B_2) = \frac{\pi}{6}$.

3. Soit $C = \left\{x \in \mathbb{R},\ x^3 > 3\right\} = \left\{x \in \mathbb{R},\ x > \sqrt[3]{3}\right\} =]\sqrt[3]{3}, +\infty[$.
D'après le lemme 3.19, l'ensemble C est borné inférieurement tel que : $\inf C = \sqrt[3]{3}$. Cependant ; C n'est pas majoré. D'où, C n'est pas borné et $\sup C$ n'existe pas.

4. $D = \left\{x \in \mathbb{R},\ e^x < \dfrac{1}{2}\right\} = \left\{x \in \mathbb{R},\ x < \ln\dfrac{1}{2}\right\} = \left\{x \in \mathbb{R},\ x < -\ln 2\right\} =]-\infty, -\ln 2[$.
D'après le lemme 3.19, l'ensemble D est majoré tel que : $\sup D = -\ln 2$. D'autre part D n'est pas minoré et par suite $\inf D$ n'existe pas.

5. Soit

$$E = \left\{x \in \mathbb{R},\ \text{il existe } p \in \mathbb{N}^* \text{tel que : x} = \frac{\sqrt{2}}{\text{p}}\right\} = \left\{\frac{\sqrt{2}}{\text{p}},\ \text{p} \in \mathbb{N}^*\right\} = \left\{\sqrt{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{3}, \cdots\right\}.$$



Remarquons que pour tout $p \in \mathbb{N}^*$: $\dfrac{\sqrt{2}}{p} \leq \sqrt{2}$ donc, $\sqrt{2}$ est un majorant de E. Par suite, E est majoré. Ainsi, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{\sqrt{2}}{p} > 0$ alors, 0 est un minorant de E. D'où E est minoré. Ce implique que E est borné.

Comme $\sqrt{2} \in E$, or $\max E = \sqrt{2} = \sup E$.

Montrons que $\inf E = 0$ 1^{re} Méthode :

Par l'absurde, supposons qu'il existe $m \in \mathbb{R}$, un minorant de l'ensemble E, tel que : $m > 0$ (c-à-d : m est minorant plus grand de 0).

En appliquant la propriété d'Archimède pour $x = m > 0$ et $y = \sqrt{2} \in \mathbb{R}$, on trouve :

$$\exists n \mathbb{N}^* \quad \text{tel que : } nm > \sqrt{2}.$$

Donc,

$$\exists n \mathbb{N}^* \quad \text{tel que : } m > \frac{\sqrt{2}}{n}.$$

Ce qui contredit que m est un minorant de l'ensemble E, par suite l'hypothèse initiale est fausse. En conséquence, $\inf E = 0$.

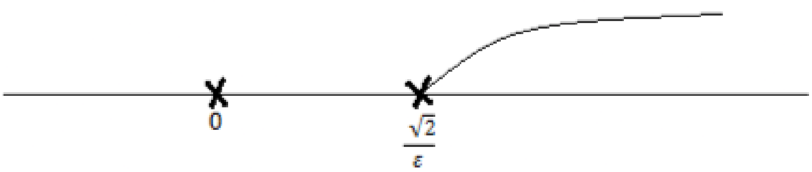
Montrons que $\inf E = 0$ 2^{me} Méthode :

Il suffit d'utiliser la caractérisation de la borne inférieure :

$$0 = \inf E \Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \ \exists x \in E : 0 + \varepsilon > x.$$

C'est à dire : $0 = \inf E \Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \ \exists p \in \mathbb{N}^* : \varepsilon > \dfrac{\sqrt{2}}{p}$.

Soit $\varepsilon > 0$, on cherche l'existence d'un $p \in \mathbb{N}^*$ vérifiant : $p > \dfrac{\sqrt{2}}{\varepsilon}$.



Donc, il suffit de choisir $p = E(\dfrac{\sqrt{2}}{\varepsilon}) + 1$. D'où $\inf E = 0$.

15 Exercice corrigé 12 (Ensemble borné, calcul de sup, inf, max, min)

Énoncé

Soient $A = [2, 4[\cup]0, 1]$, $B = \{x^2 + 1;\ x \in]1, 2]\}$, $C = \{\dfrac{1}{n};\ n \in \mathbb{N}^*\}$ et $D = \{n + 1;\ n \in \mathbb{N}^*\}$.

- Est ce que les ensembles A, B, C et D sont des ensembles bornés ?
- Calculer leurs bornes supérieure et inférieure puis leurs maximum et minimum s'il existent.

Solution

- Soit $A = [2, 4[\cup]0, 1]$:
  Posons : $A_1 = [2, 4[$ et $A_2 =]0, 1]$.
  D'après le lemme 3.19, les ensembles A_1, A_2 sont bornés, de plus : $\inf A_1 = \min A_1 = 2$ et $\sup A_1 = 4$ et $\max A_1$ n'existe pas ($4 \notin [2, 4[$).
  Ainsi, $\inf A_2 = 0$, $\min A_2$ n'existe pas ($0 \notin A_2$) et $\sup A_2 = \max A_2 = 1$.

En appliquant le lemme (3.18) on déduit que A est borné.
De plus, $\sup A = \max(\sup A_1, \sup A_2) = \max(4,1) = 4$ et comme $4 \notin A$, alors $\max A$ n'existe pas. Ainsi, $\inf A = \min(\sup A_1, \sup A_2) = \min(2,0) = 0$ et comme $0 \notin A$, alors $\min A$ n'existe pas.

— Soit $B = \{x^2+1;\ x \in]1,2]\}$:
Remarquons que :

$$\begin{aligned} x \in]1,2] \quad &\Longrightarrow \quad 1 < x \leq 2 \\ &\Longrightarrow \quad 1 < x^2 \leq 4 \quad (\text{car la fonction } x \longmapsto x^2 \text{ est fonction strictement croissante sur } \mathbb{R}^+) \\ &\Longrightarrow \quad 2 < x^2+1 \leq 5. \end{aligned}$$

C-à-d, pour tout $y \in B$, on a : $2 < y = x^2+1 \leq 5$.
Donc, 2 est un minorant de B et par suite B est minoré. 5 est un majorant de B et par suite B est majoré. Alors B est borné.
D'autre part, $5 = 2^2+1 \in B$, donc $\max B = \sup B = 5$. Montrons que $\inf B = 2$:
On utilise la caractérisation de la borne inférieure

$$\inf B = 2 \Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0,\ \exists y \in B tq : 2+\varepsilon > y,$$

et par définition des éléments de B, on a :

$$\inf B = 2 \Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0,\ \exists x \in]1,2]\ tq \quad 2+\varepsilon > x^2+1.$$

Soit $\varepsilon > 0$, on cherche l'existence d'un $x \in]1,2]$ tel que : $2+\varepsilon > x^2+1$.
On a

$$\begin{aligned} 2+\varepsilon > x^2+1 \quad &\Rightarrow \quad 1+\varepsilon > x^2 \\ &\Rightarrow \quad \sqrt{1+\varepsilon} > |x| \\ &\Rightarrow \quad -\sqrt{1+\varepsilon} < x < \sqrt{1+\varepsilon}. \end{aligned}$$

Donc, on cherche l'existence d'un réel $x \in]1,2] \cap]-\sqrt{1+\varepsilon}, \sqrt{1+\varepsilon}[$ et comme $\varepsilon > 0$ alors,

$$1+\varepsilon > 1 \Rightarrow \sqrt{1+\varepsilon} > 1.$$

• **Si $\sqrt{1+\varepsilon} < 2$:**

Dans ce cas, il suffit de prendre n'importe quel point x tel que : $1 < x < \sqrt{1+\varepsilon}$.

• **Si $\sqrt{1+\varepsilon} > 2$:**

Dans ce cas, il suffit de prendre n'importe quel point x tel que : $1 < x \leq 2$.
Alors,

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists x \in]1,2]\ tq \quad x^2 + 1 < 2 + \varepsilon.$$

D'où : $\inf B = 2$ et comme $2 \notin B$ alors $\min B$ n'existe pas.

— Soit $C = \{\frac{1}{n};\ n \in \mathbb{N}^*\}$:

$$\begin{aligned} C &= \{\frac{1}{n};\ n \in \mathbb{N}^*\} \\ &= \{\frac{1}{1},\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ ...\} \\ &= \{1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ ...\}. \end{aligned}$$

Remarquons que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\frac{1}{n} \leq 1$. Alors, 1 est un majorant de C et par suite C est majoré. Comme $1 \in C$, donc $\max C = 1$ et par suite $\sup C = \max C = 1$.

• Conjecturer la valeur de $\inf C$:
On constate que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\frac{1}{n} > 0$, alors 0 est un minorant de C et C est minoré. Alors C est borné.

De plus, pour tout $m \in]-\infty, 0]$, m est un minorant de C et comme 0 représente le plus grand des minorants de C, alors $\inf C = 0$.

Démonstration mathématique que $\inf C = 0$:
On utilise la caractérisation de la borne inférieure

$$\inf C = 0 \Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0,\ \exists x \in C : 0 + \varepsilon > x.$$

Et par la définition des éléments de C, on a

$$\inf C = 0 \Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0,\ \exists n \in \mathbb{N}^* : \varepsilon > \frac{1}{n}.$$

Soit $\varepsilon > 0$, on cherche l'existence d'un $n \in \mathbb{N}^*$ vérifiant $\varepsilon > \frac{1}{n}$.
On a $\varepsilon > \frac{1}{n}$ alors $n > \frac{1}{\varepsilon}$.
Choisissant $n = E(\frac{1}{\varepsilon}) + 1$.
Ceci étant, on trouve $\inf C = 0$ et comme $0 \notin C$, donc $\min C$ n'existe pas.

— Soit $D = \{n+1;\ n \in \mathbb{N}^*\}$:

$$\begin{aligned} D &= \{n+1;\ n \in \mathbb{N}^*\} \\ &= \{1+1,\ 2+1,\ 3+1, ...\} \\ &= \{2,\ 3,\ 4, ...\}. \end{aligned}$$

Remarquons que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $n + 1 \geq 2$, alors 2 est un minorant de D, comme $2 \in D$ alors $\min D = 2$ et par suite $\min D = \inf D = 2$.
D'autre part, supposons par l'absurde que D est majoré, c'-à-d :

$$\exists \alpha \in \mathbb{R} : n + 1 < \alpha,\ \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

D'où

$$\exists \alpha \in \mathbb{R} : n < 1 + \alpha,\ \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Ce qui implique que

$$\exists \beta = \alpha + 1 \in \mathbb{R} : n + 1 < \beta,\ \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

C'est à dire $\mathbb{N}^*$ est majoré (contradiction Mathématiques), alors D n'est pas majoré, donc n'est pas borné et par suite $\sup D$ et $\max D$ n'existent pas.

16 Exercice corrigé 13 (L'insuffisance des nombres irrationnels)

Énoncé

(i) Question de cours :
- Quel est le principe de raisonnement par l'absurde ?

(ii) Montrons que l'équation $x^2 = 2$ n'admet pas une solution dans $\mathbb{Q}$.

Solution

(i) Voir le complément.

(ii) On montre que : $\nexists x \in \mathbb{Q},\ x^2 = 2$.
Par l'absurde supposons qu'il existe $x \in \mathbb{Q}$ tel que $x^2 = 2$. Comme $x \in \mathbb{Q}$, alors $\exists p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{Q} | x = \frac{p}{q}$. Ainsi, on suppose que p et q sont premiers entre eux (la fraction $\frac{p}{q}$ est irréductible).
On a

$$\begin{aligned} x^2 = 2 &\Longrightarrow \frac{p^2}{q^2} = 2 \\ &\Longleftrightarrow p^2 = 2q^2, \end{aligned}$$

alors p^2 est pair. Donc, p est également pair, c'est à dire $\exists p' \in \mathbb{Z} | p = 2p'$.
D'où $\exists p' \in \mathbb{Z} | p^2 = 4p'^2$. Alors, p^2 est multiple de 4.
Par suite : $q^2 = 2p'^2,\ p' \in \mathbb{Z}$. Donc, q^2 est pair et par suite q est pair, alors 2 est un facteur commun à p et q.
Mais nous avons supposer que p et q sont premier entre eux. Contradiction.
Alors on déduit que l'hypothèse initiale est fausse.
Par conséquent, l'équation $x^2 = 2$ n'admet pas de solution dans $\mathbb{Q}$.

Conclusion :
L'ensemble des nombres rationnels possède plusièurs lacunes, il est donc nécessaire de rechercher un ensemble plus large qui dissimule ces lacunes. Cet ensemble est l'ensemble des nombres réels.

Complément

Le raisonnement par l'absurde

En mathématiques, **une démonstration est un raisonnement qui permet, à partir de certains axiomes, d'établir qu'une assertion est nécessairement vraie**. Les démonstrations utilisent la logique mais incluent habituellement des éléments du langage naturel en évitant tant que possible d'introduire des ambiguïtés. Un résultat qui est démontré peut être utilisé comme base pour démontrer d'autres assertions. Une assertion qui est supposée vraie mais qui n'a pas encore été démontrée est appelée une conjecture.

Principe :

Il consiste à supposer le contraire de la proposition énoncée et de montrer qu'on aboutit alors à une contradiction (impossibilité) Mathématique ou avec l'hypothèse.
En d'autre termes, si on veut utiliser la démonstration par l'absurde pour montrer la proposition : $P \Rightarrow Q$; on suppose que $\overline{Q}$ (la négation de Q) est vraie et on arrive à partir de cette hypothèse à une contradiction Mathématique ou que P est fausse. Alors, l'hypothèse initiale ($\overline{Q}$ est vraie) est fausse et par suite Q est vraie.

Exemple :

Comme exemple, nous démontrerons que $\sqrt{2}$ n'est pas un nombre rationnel.
Démonstration
Par l'absurde, supposons le contraire, c-à-d que le nombre $\sqrt{2}$ est rationnel. Alors, il existe $p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}^*$ tel que : $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$.
Quitte à simplifier la fraction, **nous pouvons supposer que p et q n'ont pas de facteur commun**. Multiplions par q et élevons au carré, on trouve :

$$2q^2 = p^2$$

Le nombre p^2 est pair, donc p **est également pair**. Mais si p est pair, alors p^2 est multiple de 4. Donc q^2 est multiple de 2, donc q **est pair**. Mais alors 2 est un facteur commun à p et q. **Mais nous avons supposé au départ que ces deux nombres n'avaient pas de facteur commun ! Puisqu'une telle contradiction a été établie, nous devons conclure que notre supposition d'origine était fausse**.
Par conséquent, on ne peut pas trouver deux nombres p et q premiers entre eux tels qu'on puisse écrire $\sqrt{2}$ sous la forme $\frac{p}{q}$, donc $\sqrt{2}$ est irrationnel.

Le raisonnement par récurrence

Principe

Pour démontrer qu'une proposition $P(n)$ dépendante d'un entier naturel n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$; on se procède par les trois étapes suivantes :

1. **Initialisation :** On montre que $P(0)$ est vraie.
2. **Hérédité :** On suppose que la proposition $P(n)$ est vraie (on l'appelle hypothèse de récurrence) et à partir d'elle on essaie de montrer $P(n+1)$.
   En d'autre termes l'hypothèse d'hérédité signifie que si $P(n)$ est vraie alors, $P(n+1)$ l'est aussi.
3. **Conclusion :** Par le principe de récurrence, on déduit que $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$. En effet, $P(0)$ est vraie par l'hypothèse d'initialisation donc $P(1)$ l'est par hérédité, donc $P(2)$ aussi pour la même raison, etc.

Exemple

Soit la proposition $P(n)$

$$(P(n)) : \qquad (1+x)^n \geq 1 + nx, \ \forall n \in \mathbb{N}, \ \forall x > 0.$$

On démontre par récurrence que $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Initialisation Pour $n = 0$, on a :

$$(1+x)^0 = 1 \geq 1 + 0.x.$$

est vraie pour tout $x > 0$.
Donc la propriété est vraie pour $n = 0$.

Hérédité Soit $x > 0$, on suppose que la proposition $P(n)$ est vraie jusqu'au rang n ($P(0)$ est vraie, $P(1)$ est vraie, ...$P(n-1)$ est vraie, $P(n)$ est vraie).
C'-à-d :

$$(1+x)^n \geq 1+nx, \tag{7}$$

et montrons que $P(n+1)$ est aussi vraie.
C'-à-d, on essaie de prouver que

$$(1+x)^{n+1} \geq 1+(n+1)x,$$

Remarquons que

$$(1+x)^{n+1} = (1+x)^n(1+x).$$

Comme $(1+x) > 0$ et d'après l'hypothèse de récurrence (7), on obtient

$$\begin{aligned}(1+x)^{n+1} &= (1+x)^n(1+x)\\ &\geq (1+nx)(1+x)\\ &= 1+x+nx+nx^2\\ &= 1+(n+1)x+nx^2.\end{aligned}$$

Comme $x > 0$, $\quad nx^2 \geq 0$, donc

$$\begin{aligned}(1+x)^{n+1} &\geq 1+(n+1)x+nx^2\\ &\geq 1+(n+1)x.\end{aligned}$$

Par conséquent la propriété $P(n+1)$ est aussi vraie.

Conclusion Par le principe de récurrence, la proposition $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Relation d'ordre dans un ensemble E

Définition 1

— Une relation binaire définie sur E, est une propriété que chaque couple (x, y) d'éléments de E est susceptible d'avoir ou non.
— Si $\mathcal{R}$ désigne une relation binaire définie sur E, on note par $x\mathcal{R}y$ pour signifier que x est en relation avec y.
— Ainsi, se donner une relation binaire $\mathcal{R}$ sur E, c'est se donner la partie G de $E \times E$ constitué des couples (x, y) tels que : $x\mathcal{R}y$.

Définition 2

Soit $E \neq \phi$ et $\mathcal{R}$ une relation binaire définie sur E. On dit que $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre sur E si :

1. $\mathcal{R}$ est **réflexive** : $\forall x \in E, x\mathcal{R}x$.
2. $\mathcal{R}$ est **antisymétrique** : $\forall x, y \in E, (x\mathcal{R}y \wedge y\mathcal{R}x) \Longrightarrow (x = y)$.
3. $\mathcal{R}$ est **transitive** : $\forall x, y, z \in E, (x\mathcal{R}y \wedge y\mathcal{R}z) \Longrightarrow (x\mathcal{R}z)$.

Dans ce cas on dit que $(E, \mathcal{R})$ est un **ensemble ordonné**.

Définition 3

Soient $x, y \in E$. On dit que x et y sont comparables si : $x\mathcal{R}y$ ou $y\mathcal{R}x$.

Définition 4

— On dit que $\mathcal{R}$ est une relation **d'ordre total** sur E **($(E, \mathcal{R})$ est totalement ordonné)** si **tous les éléments de E sont comparables**.
— On dit que $\mathcal{R}$ est une relation **d'ordre partiel** sur E **($(E, \mathcal{R})$ est partiellement ordonné)** si **s'ils existent deux éléments de E non comparables** :

$$\exists x, y \in E, (x \not\mathcal{R} y \wedge y \not\mathcal{R} x)$$

Exemple

Considérons l'ensemble des nombres rationnels $\mathcal{Q}$. On définie sur la relation suivante :

$$\forall r, r' \in \mathcal{Q} : r\mathcal{R}r' \Longleftrightarrow r \leq r'$$

$\mathcal{R}$ est une relation d'ordre total sur E.
Démonstration

a) On a, pour tout $r \in \mathcal{Q} : r\mathcal{R}r$. Alors, $r\mathcal{R}r$. Ce qui implique que $\mathcal{R}$ est **réflexive**.

b) Soient $r, r' \in \mathcal{Q}$ telles que $r\mathcal{R}r'$ et $r'\mathcal{R}r$. D'où : $r \leq r'$ et $r' \leq r'$. Alors, $r = r'$. Ce qui implique que $\mathcal{R}$ est **antisymétrique**.

c) Soient $r, r', r'' \in \mathcal{Q}$ telles que $r\mathcal{R}r'$ et $r'\mathcal{R}r''$. D'où : $r \leq r'$ et $r' \leq r''$. Alors, $r \leq r''$. Ce qui implique que $\mathcal{R}$ est **transitive**.

De plus pour tout $r, r' \in \mathcal{Q} : r \leq r'$ ou $r' \leq r$.