# 1 CINÉMATIQUE DU POINT

## 1.1 REPÉRAGE D'UN POINT MATÉRIEL DANS L'ESPACE

Pour décrire la position d'un objet dans l'espace, il est nécessaire de disposer d'une référence. Par exemple, un homme assis dans un train est immobile par rapport au wagon, mais en mouvement par rapport à la Terre. Ainsi pour déterminer le mouvement d'un point, on se rapporte à un solide S supposé indéformable qui doit être défini clairement. Ce solide constitue le référentiel d'étude $\mathscr{R}$.

Ensuite, on repère les points de l'espace dans ce référentiel à l'aide d'un repère orthonormé direct, soit un point origine particulier au solide S (souvent on prend le centre de gravité de S) et 3 axes orthogonaux formant un trièdre direct. Plusieurs repères ou systèmes de coordonnées peuvent alors être choisis en fonction notamment de la géométrie du problème.

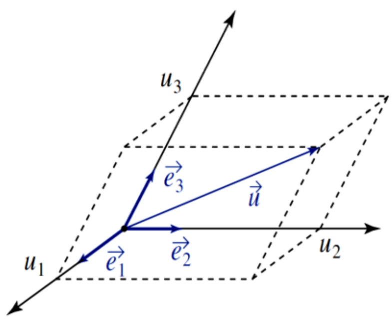


**Fig1**. $u_1, u_2, u_3$ Sont les composantes de $\vec{u}$ dans la base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$

Un bon schéma est la clef de la résolution de tout problème de mécanique. Comme l'objectif est de décrire ici des mouvements dans l'espace, il est particulièrement important de savoir faire des dessins en perspective, et de savoir réaliser des projections adéquates selon des plans bien choisis. C'est ce qui sera détaillé dans la présentation des systèmes de coordonnées.

### 1.1.1 *Base vectorielle*

Dans l'espace à trois dimensions, une base vectorielle normée est un ensemble de trois vecteurs unitaires non coplanaires : $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ Fig.1. La base $\mathscr{B}$ $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ étant donnée, un vecteur se décompose de façon unique :

$$\vec{u} = u_1\vec{e}_1 + u_2\vec{e}_2 + u_3\vec{e}_3$$

La base $\mathscr{B}$ est orthonormée si $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ et sont des vecteurs unitaires orthogonaux et elle est directe si :

$$\vec{e}_3 = \vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2$$

Pratiquement, retenons qu'une base orthonormée est directe s'il est possible de superposer les vecteurs $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ et $\vec{e}_3$ respectivement au pouce, à l'index et au majeur de la main droite Fig.2.

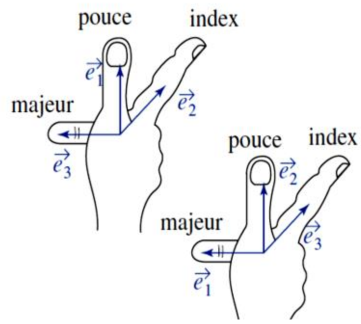


**Fig.2**. Base orthonormées directes

### 1.1.2 *Repère*

Un repère d'espace $(O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ est constitué d'un point origine et d'une base vectorielle normée. Ayant défini un repère, il suffit de trois coordonnées pour repérer un point.

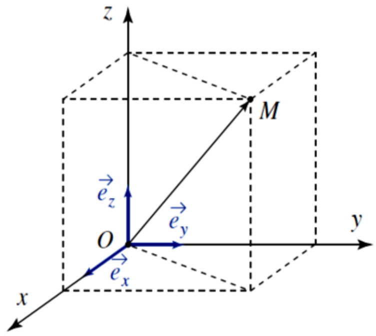


**Fig.3**. Coordonnées cartésiennes

### 1.1.3 *Vecteur position*

En mécanique classique, les objets évoluent dans l'espace à trois dimensions de la géométrie euclidienne. Un point origine O étant défini, un point M est repéré par son vecteur position :

$$\vec{r} = \overrightarrow{OM}.$$

## *1.2 Différent type de coordonnées*

### *1.2.1 Coordonnées cartésiennes.*

Un repère cartésien est un repère orthonormé direct, défini par un point-origine et une base orthonormée directe $(O;\ \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$Fig.3. Les coordonnées cartésiennes $(x, y, z)$ de M sont les composantes de son vecteur position :

$$\vec{r} = \overrightarrow{OM} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z\ .$$

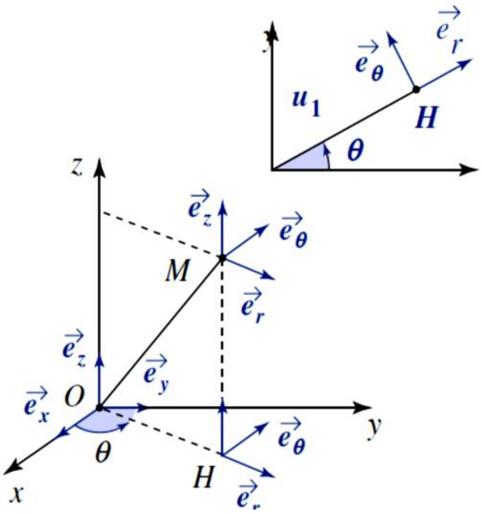

**Fig.4**. Coordonnées cylindriques

### *1.2.2 Coordonnées cylindriques*

#### *1.2.2.1 <u>Repérage d'un point</u>*

Soit un repère cartésien$(O;\ \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$. H étant la projection orthogonale de M sur le plan(Oxy), les coordonnées cylindriques $(r, \theta, z)$ du point M sont définies par :

- $r$ : distance OH $(r > 0)$ ;
- $\theta$ angle $(\vec{e_x}, \overrightarrow{OH})$, le sens positif de $\theta$ étant défini par $\vec{e_z}$ ;
- z troisième coordonnée Fig.4.

#### *1.2.2.2 <u>Base locale</u>*

La base locale orthonormée $(\vec{e_r}, \vec{e_\theta}, \vec{e_z})$ liée au point M est Définie par :

- $\vec{e}_r$ tel que $\overrightarrow{OH} = r\vec{e}_z$.
- $\vec{e}_\theta = \vec{e}_z \wedge \vec{e}_r$ , parallèle à $(xOy)$ et pointant dans le sens $\theta$croissant.Cette base est locale, car elle varie avec la position de M, qui s'écrit :

$$\overrightarrow{OM} = r\vec{e}_r + z\vec{e}_z.$$

L'utilisation des coordonnées cylindriques peut, dans certains, cas amener une simplification notable des expressions par rapport aux coordonnées cartésiennes.

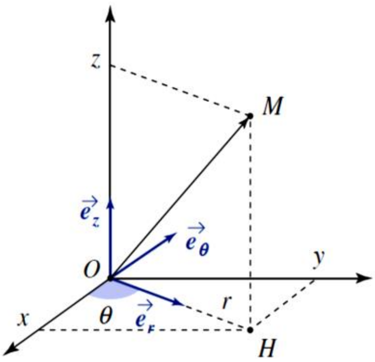

**Fig.5**.Relation entre les coordonnées cylindriques et cartésiennes : $x = r\cos\theta\,;\, y = r\sin\theta$

#### *1.2.2.3 <u>Coordonnées polaires</u>*

Lorsque le point M se déplace dans un plan $(Oxy)$, il est possible d'utiliser les coordonnées cartésiennes $(x, y)$ ou les coordonnées polaires $(r, \theta)$ pour repérer les positions.

$$\vec{e}_r = \cos\theta\vec{e}_x + \sin\theta\vec{e}_y\ ;\ \vec{e}_\theta = -\sin\theta\vec{e}_x + \cos\theta\vec{e}_y;$$
$$x = r\cos\theta;\quad y = r\sin\theta;\quad r = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

### *1.2.3 Coordonnées sphérique*

#### *1.2.3.1 <u>Base locale</u>*

La base locale orthonormée directe $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi)$ est définie par Fig.6. :

- $\overrightarrow{OM} = r\vec{e}_r$ , avec $r > 0$ ;
- $\vec{e}_\varphi = \frac{\vec{e}_z \wedge \overrightarrow{OH}}{OH}$ parallèle à $(xOz)$ ;
- $\vec{e}_\theta = \vec{e}_\varphi \wedge \vec{e}_r$, parallèle au plan contenant Oz et OM.

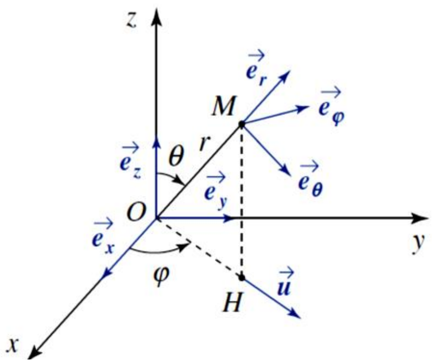

**Fig.6**.Coordonnées sphériques.

#### *1.2.3.2 <u>Coordonnées d'un point</u>*

Les coordonnées sphériques $(r, \theta, \varphi)$ de M sont, par définition :

- $r = OM\ (r > 0)$ ;

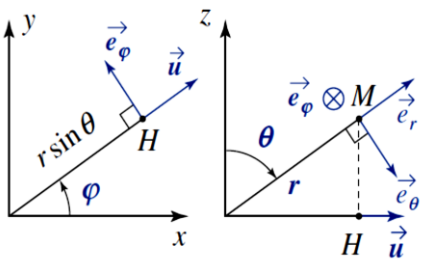

**Fig.7**.Coordonnées sphériques.

- $\theta$: angle $(\vec{e}_z, \vec{e}_r)$ orienté par $\vec{e}_\varphi$, variant de 0 à $\pi$ ;
- $\varphi$: angle$(\vec{e}_x, \overrightarrow{OH})$ orienté par $\vec{e}_z$, variant de 0 à $2\pi$

**Remarque**

- $\vec{e}_\theta$ pointe vers les $\theta$ croissants et $\vec{e}_\varphi$ vers les $\varphi$ croissants ;
- r n'a pas la même signification en coordonnées sphérique ou cylindrique ;
- Dans tout plan $=$ cte ,r et $\theta$ sont les coordonnées polaires du point M Fig.7.

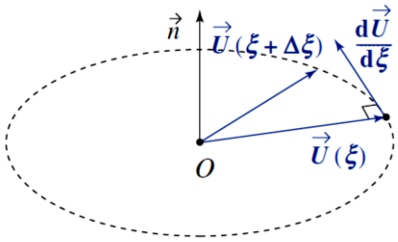


**Fig.8**.Variation d'un vecteur de norme constante, orthogonal à $\vec{n}$ .

## *1.3 Dérivation d'une fonction vectorielle*

### *1.3.1 Définition*

Soit $\vec{U}(\xi)$une grandeur vectorielle dépendant de la variable $\xi$.
La dérivée de $\vec{U}$ par rapport à $\xi$ est Fig.8 :

$$\frac{d\vec{U}}{d\xi} = \lim_{\Delta\xi\to 0} \frac{\vec{U}(\xi+\Delta\xi) - \vec{U}(\xi)}{\Delta\xi}$$

**La dérivée d'une grandeur vectorielle dépend du référentiel.**

Lorsqu'il sera nécessaire de préciser le référentiel dans lequel s'effectue cette dérivation, nous noterons $\left(\frac{d\vec{U}}{d\xi}\right)$ la dérivée de $\vec{U}$ par rapport à $\xi$ dans $\mathscr{R}$. Dans toute la suite de ce chapitre, $\mathscr{R}$ représente le référentiel de l'observateur (ou référentiel d'étude) et le repère cartésien $(O;\ \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ est fixe par rapport à $\mathscr{R}$.

### *1.3.2 Propriétés*

Nous admettrons les propriétés suivantes, qui sont les transpositions aux fonctions vectorielles des propriétés classiques des dérivées :

- si $\vec{W}(\xi) = \lambda(\xi)\vec{U}(\xi)$, alors $\frac{d\vec{W}}{d\xi} = \frac{d\lambda}{d\xi}\vec{U} + \lambda\frac{d\vec{U}}{d\xi}$;
- si $\vec{W}(\xi) = \lambda(\xi)\vec{V}(\xi)$, alors $\frac{d\vec{W}}{d\xi} = \frac{d\vec{U}}{d\xi} + \frac{d\vec{V}}{d\xi}$;
- $A(\xi) = \vec{U}(\xi) * \vec{V}(\xi)$, alors $\frac{dA}{d\xi} = \frac{d\vec{U}}{d\xi}.\vec{V} + \vec{U}.\frac{d\vec{V}}{d\xi}$;
- $\vec{W}(\xi) = \lambda(\xi) \wedge \vec{V}(\xi)$, alors $\frac{d\vec{W}}{d\xi} = \frac{d\vec{U}}{d\xi}\wedge\vec{V} + \vec{U}\wedge\frac{d\vec{V}}{d\xi}$;

### *1.3.3 Dérivée d'un vecteur de norme constante*

Soit $\vec{U}(\xi)$un vecteur de norme U constante. Ce vecteur n'est pas pour autant constant, car son orientation peut varier.

$$\frac{dU^2}{d\xi} = \frac{d}{d\xi}(\vec{U}.\vec{U}) = 0, \qquad \text{donc } 2\vec{U}.\frac{d\vec{U}}{d\xi} = 0$$

**La dérivée d'un vecteur de norme constante est orthogonale à ce vecteur ou nulle. C'est le cas des vecteurs unitaires.**

### *1.3.4 Expression de la dérivée en coordonnées cartésiennes*

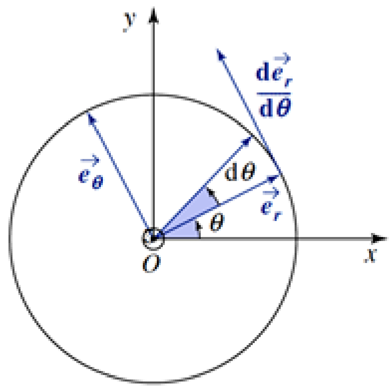


**Fig.9.** $\vec{e}_\theta = \frac{d\vec{e}_r}{d\theta}$.

La fonction vectorielle $\vec{U}(\xi)$ s'exprime par :

$\vec{U} = U_x\vec{e}_x + U_y\vec{e}_y + U_z\,\vec{e}_z$

Comme $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$ sont constants dans $\mathscr{R}$**,** la dérivée de $\vec{U}$ dans $\mathscr{R}$ est donc :

$$\left(\frac{d\vec{U}}{d\xi}\right)_{\mathbf{R}} = \frac{d\overrightarrow{U_x}}{d\xi}\,\vec{e}_x + \frac{d\overrightarrow{U_y}}{d\xi}\,\vec{e}_y + \frac{d\overrightarrow{U_z}}{d\xi}\,\vec{e}_z.$$

### *1.3.5 Expression de la dérivée en coordonnées cartésiennes*

Considérons un point M mobile par rapport à $\mathscr{R}$ et la base locale $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$ liée à M. Pour un observateur lié à $\mathscr{R}$, les vecteurs $\vec{e}_r$ et $\vec{e}_\theta$ dépendent de θ et leur dérivée est non nulle Fig.9. :

- $\vec{e}_r = \cos\theta\vec{e}_x + \sin\theta\vec{e}_y$ donne $\left(\frac{d\vec{e}_r}{d\theta}\right)_{/R} = -\sin\theta\vec{e}_x + \cos\theta\vec{e}_y;$
- $\vec{e}_\theta = -\sin\theta\vec{e}_x + \cos\theta\vec{e}_y$ donne $\left(\frac{d\vec{e}_\theta}{d\theta}\right)_{/R} = -\cos\theta\vec{e}_x - \sin\theta\vec{e}_y;$

**En coordonnées cylindriques, les vecteurs de la base locale dépendent de** θ **:**

$$\left(\frac{d\vec{e}_r}{d\theta}\right)_{/R} = \vec{e}_\theta \quad \text{et} \quad \left(\frac{d\vec{e}_\theta}{d\theta}\right)_{/R} = -\vec{e}_r$$

Notons que nous avons exprimé le vecteur dérivé relativement au référentiel $\mathscr{R}$ dans une base mobile par rapport à $\mathscr{R}$.

Ces résultats peuvent être retrouvés de façon moins rigoureuse, mais plus concrète : au cours d'une rotation élémentaire $d\theta$, l'extrémité du vecteur unitaire $\vec{e}_r$ décrit un segment de mesure $d\theta$, orthogonal à $\vec{e}_r$, donc :

$$d\vec{e}_r = d\theta\vec{e}_\theta \;\text{ et }\; \frac{d\vec{e}_r}{d\theta} = \vec{e}_\theta \;\;;\;\; d\vec{e}_\theta = -d\theta\vec{e}_r \;\text{ et }\; \frac{d\vec{e}_\theta}{d\theta} = -\vec{e}_r$$

## *1.4 Vitesse d'un point*

### *1.4.1 Définition*

Soit O un point fixe du référentiel $\mathscr{R}$. Le vecteur vitesse du point mobile M par rapport à ce référentiel est :

$$\vec{v}(M)_{/R} = \left(\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right)_{/R}$$

Notation : Conformément à l'usage, la dérivation par rapport à la variable temps est notée par un point :

$$\dot{s} = \frac{ds}{dt} \;\text{ et }\; \ddot{s} = \frac{d^2s}{dt^2}$$

### *1.4.2 Expression en coordonnées cartésiennes*

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{e}_x + y\,\vec{e}_y + z\,\vec{e}_z.$$

**En coordonnées cartésiennes, le vecteur vitesse $\vec{v}$ a pour expression :**

$$\vec{v}(M)_{/R} = \dot{x}\vec{e}_x + \dot{y}\,\vec{e}_y + \dot{z}\,\vec{e}_z.$$

### *1.4.3 Expression en coordonnées cylindriques*

Pour définir la position du point M, nous avons l'expression suivante Fig.10 :

$\overrightarrow{OM} = r\vec{e}_r + z\,\vec{e}_z$

Pour un observateur lié à $\mathscr{R}$ , $\vec{e}_r$ est fonction de $\theta$ , et $\theta$ est fonction du temps

$$\vec{v}(M)_{/R} = \dot{r}\vec{e}_r + r\left(\frac{d\vec{e}_r}{dt}\right)_{/R} + \dot{z}\,\vec{e}_z.$$

Or

$$\left(\frac{d\vec{e}_r}{dt}\right)_{/R} = \left(\frac{d\vec{e}_r}{d\theta}\right)_{/R}\frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta}\vec{e}_\theta \text{ , d'ou}$$

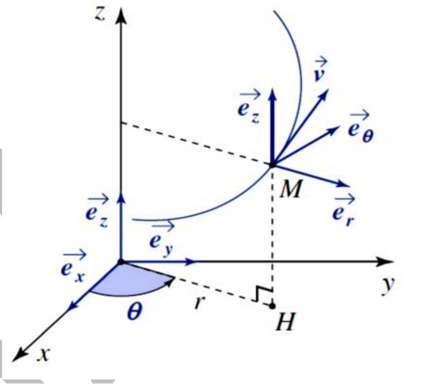


**Fig.10**. Coordonnées cylindrique

**En coordonnées cylindriques, le vecteur vitesse a pour expression :**

$$\vec{v}(M)_{/R} = \dot{r}\vec{e}_x + r\dot{\theta}\,\vec{e}_\theta + \dot{z}\,\vec{e}_z.$$

Le vecteur $\vec{v}(M)_{/R}$ est défini dans $\mathscr{R}$ et nous l'avons exprimé avec la base locale (base de projection) qui est mobile dans $\mathscr{R}$.

**Remarque : composition des vitesses**

Considérons la vitesse du point M obtenue lorsque seule l'une de ses trois coordonnées est libre de varier.

- Si r varie seul, le mobile décrit une droite, soit $\vec{v}(M)_{/R} = \vec{v}_r = \dot{r}\vec{e}_r$
- Si $\theta$ varie seul, le mobile décrit un cercle avec la vitesse $r\dot{\theta}$ orientée selon $\vec{e}_\theta$ Fig.11, soit : $\vec{v}(M)_{/R} = \vec{v}_\theta = r\dot{\theta}\vec{e}_\theta$.
- Si z varie seul, le mobile décrit une droite, soit $\vec{v}(M)_{/R} = \vec{v}_z = \dot{z}\vec{e}_z$.

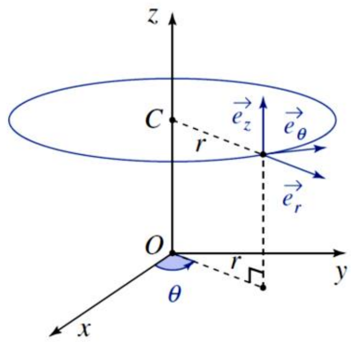


**Fig.11**.Trajectoire de M si r et z sont constants.

L'expression générale du vecteur vitesse permet de vérifier que :

$$\vec{v}(M)_{/R} = \vec{v}_r + \vec{v}_\theta + \vec{v}_z$$

Nous admettrons le caractère général de ce résultat : le vecteur vitesse de M est égal à la somme des vecteurs vitesse que l'on obtient en ne faisant varier successivement qu'une seule de ses coordonnées. Cette propriété ne sera pas applicable à l'accélération.

## 1.5 Accélération

### 1.5.1 Définition

**Le vecteur accélération de M par rapport au référentiel $\mathscr{R}$ est :**

$$\vec{a}(M)_{/R} = \left(\frac{d\vec{v}(M)_{/R}}{dt}\right)_{/R} = \left(\frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2}\right)_{/R}.$$

Seul un mouvement à la fois rectiligne et uniforme est non accéléré. Un mouvement uniforme (vitesse constante), mais non rectiligne est accéléré, car la direction du vecteur vitesse est variable Fig.12.
Bien remarquer sur les trois graphiques de la fig.12. L'orientation de $\vec{a}$ qui pointe en permanence dans la concavité de la trajectoire.

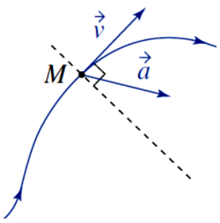


**Fig.11a**.la vitesse est croissante.

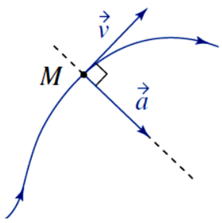


**Fig.11a**.la vitesse est uniforme.

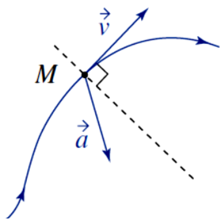


**Fig.11a**.la vitesse est décroissante.

### 1.5.2 Expression en coordonnées cartésiennes

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{e}_x + y\,\vec{e}_y + z\,\vec{e}_z$$

**En coordonnées cartésiennes :**

$$\vec{a}(M)_{/R} = \dot{x}\vec{e}_x + \dot{y}\,\vec{e}_y + \dot{z}\,\vec{e}_z.$$

### 1.5.3 Expression en coordonnées cylindriques

Pour un observateur de $\mathscr{R}$, le repère cartésien $(O;\ \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ est fixe. Les vecteurs $\vec{e}_r$ et $\vec{e}_\theta$ sont fonction de , et $\theta$ est fonction du temps. Soit :

$$\left(\frac{d\vec{e}_r}{d\theta}\right)_{/R} = \vec{e}_\theta \quad \text{et} \quad \left(\frac{d\vec{e}_\theta}{d\theta}\right)_{/R} = -\vec{e}_r$$

Or $\vec{v}(M)_{/R} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\,\vec{e}_\theta + \dot{z}\,\vec{e}_z$ d'où

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \ddot{r}\vec{e}_r + \dot{r}\frac{d\vec{e}_r}{dt} + \dot{r}\dot{\theta}\,\vec{e}_\theta + r\ddot{\theta}\vec{e}_\theta + r\dot{\theta}\frac{d\vec{e}_\theta}{dt} + \ddot{z}\vec{e}_z$$

**En coordonnées cylindriques :**

$$\vec{a}(M)_{/R} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{e}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\vec{e}_\theta + \ddot{z}\vec{e}_z.$$

## 1.6 MOUVEMENTS D'UN RÉFÉRENTIEL PAR RAPPORT À UN AUTRE

### 1.6.1 Mouvement relatif et mouvement absolu

On considère deux référentiels $R_1(O_1; X_1; Y_1; Z_1)$et$R_2(O_2; X_2; Y_2; Z_2)$, de base respectives $(\vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_1)$ et $(\vec{i}_2, \vec{j}_2, \vec{k}_2)$, en mouvement l'un par rapport à l'autre. On suppose que $R_1$ est fixe, on l'appel référentiel absolu. Le référentiel $R_2$ est alors appelé référentiel relatif ; il est en mouvement par rapport à $R_1$. On On étudie le mouvement d'un point matériel M par rapport aux deux référentiels :

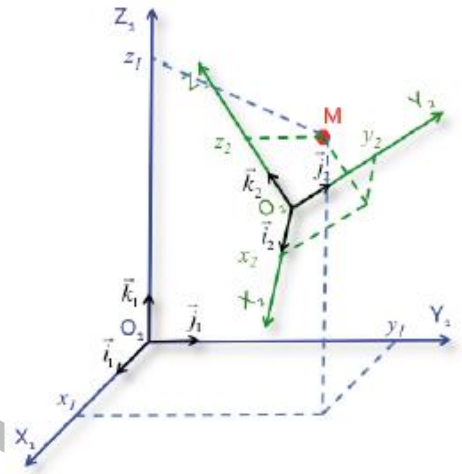


**Fig.12**.mouvement relatif.

### 1.6.2 Le mouvement absolu

Le mouvement de M par rapport au référentiel absolu est appelé Mouvement absolu. La position du point M est repéré par la Donnée des coordonnées cartésiennes dans le référentiel $R_1$ (voir figure 12).

$$\overrightarrow{O_1M} = x_1\vec{i}_1 + y_1\,\vec{j}_1 + z_1\,\vec{k}_1.$$

La vitesse absolue de M est la vitesse du point matériel M par rapport au référentiel absolu, elle est
Obtenue en dérivant par rapport au temps le vecteur position dans le référentiel $R_1$.

$$\vec{V}(M)_{/R_1} = \left(\frac{d\overrightarrow{O_1M}}{dt}\right)_{/R_1}$$

Les vecteurs de la base $(\vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_1)$ étant liés au référentiel $R_1$ leurs dérivées temporelles respectives sont Nulles : $\left(\frac{d\vec{i}_1}{dt}\right)_{/R_1} = \left(\frac{d\vec{j}_1}{dt}\right)_{/R_1} = \left(\frac{d\vec{k}_1}{dt}\right)_{/R_1} = 0$ .Il suffit alors de dériver les composantes :

$$\vec{V}(M)_{/R_1} = \dot{x}\vec{i}_1 + \dot{y}\,\vec{j}_1 + \dot{z}\,\vec{k}_1$$

L'accélération absolue est obtenue en dérivant la vitesse absolue par rapport au temps dans le référentiel Absolu :

$$\vec{\gamma}(M)_{/R_1} = \left(\frac{d\vec{V}(M)_{/R_1}}{dt}\right)_{/R_1}$$

Là aussi, il suffit de dériver les composantes du vecteur vitesse absolue :

$$\vec{\gamma}(M)_{/R_1} = \ddot{x}_1\vec{i}_1 + \ddot{y}_1\,\vec{j}_1 + \ddot{z}_1\,\vec{k}_1$$

### 1.6.3 Le mouvement Relatif

Le mouvement de M par rapport au référentiel relatif est appelé mouvement relatif. La position du point M est repéré par la donnée des coordonnées cartésiennes dans le référentiel $R_2$ (Fig.12).

$$\overrightarrow{O_2M} = x_2\vec{i}_2 + y_2\,\vec{j}_2 + z_2\,\vec{k}_2$$

La vitesse relative de M est la vitesse du point matériel par rapport au référentiel relatif, elle est obtenue en dérivant par rapport au temps le vecteur position dans le référentiel $R_2$ :

$$\vec{V}(M)_{/R_2} = \left(\frac{d\overrightarrow{O_2M}}{dt}\right)_{/R_2}$$

Dans ce cas les vecteurs de la base $(\vec{i}_2, \vec{j}_2, \vec{k}_2)$ étant liés au référentiel $R_2$ leurs dérivées temporelles respectivement sont nulles $\left(\frac{d\vec{i_2}}{dt}\right)_{/R_2} = \left(\frac{d\vec{j_2}}{dt}\right)_{/R_2} = \left(\frac{d\vec{k_2}}{dt}\right)_{/R_2} = 0$ Donc là aussi, il suffit de dériver les composantes :

$$\vec{V}(M)_{/R_2} = \dot{x}_2\vec{i}_2 + \dot{y}_2\,\vec{j}_2 + \dot{z}_2\,\vec{k}_2$$

L'accélération relative est obtenue en dérivant la vitesse relative par rapport au temps dans le référentiel relatif :

$$\vec{\gamma}(M)_{/R_2} = \left(\frac{d\vec{V}(M)_{/R_2}}{dt}\right)_{/R_2}$$

Elle a comme expression dans la base relative :

$$\vec{\gamma}(M)_{/R_2} = \ddot{x}_2\vec{i}_2 + \ddot{y}_2\vec{j}_2 + \ddot{z}_2\,\vec{k}_2$$

### *1.6.4 Cas particulier :*

**1. $R_2$ en translation rectiligne par rapport à $R_1$**

Dans ce cas, les vecteurs de la base relative $(\vec{i}_2, \vec{j}_2, \vec{k}_2)$ sont aussi fixes par rapport au référentiel $R_1$ :

$$\left(\frac{d\vec{i_2}}{dt}\right)_{/R_1} = \left(\frac{d\vec{j_2}}{dt}\right)_{/R_1} = \left(\frac{d\vec{k_2}}{dt}\right)_{/R_1} = 0$$

**2. $R_2$ en rotation par rapport à $R_1$**

Si le référentiel $R_2$ est en rotation par rapport au référentiel $R_1$ avec une vitesse angulaire $\vec{\omega}(R_2/R_1)$. Les vecteurs de la base relative sont alors aussi en rotation avec la même vitesse angulaire $\vec{\omega}(R_2/R_1) = \vec{\omega}$ . En utilisant le résultat concernant le mouvement circulaire (cours) on obtient les dérivées temporelles respectives des vecteurs de base :

$$\left(\frac{d\vec{i_2}}{dt}\right)_{/R_1} = \vec{\omega} \wedge \vec{i}_2\,;\ \left(\frac{d\vec{j_2}}{dt}\right)_{/R_1} = \vec{\omega} \wedge \vec{j}_2\,;\ \left(\frac{d\vec{k_2}}{dt}\right)_{/R_1} = \vec{\omega} \wedge \vec{k}_2$$

**3. Cas général : $R_2$ en mouvement quelconque par rapport à $R_1$**

Tout mouvement d'un référentiel par rapport à l'autre peut être ramené à la composition d'un mouvement de translation rectiligne et d'un mouvement de rotation, d'où l'importance de ces deux types de mouvement.

## *1.7 Dérivation en repère mobile*

Dans toute la suite (sauf si autrement précisé), on va considérer les deux référentiels $R_1$ et $R_2$ liés respectivement au repères $(O_1; X_1; Y_1; Z_1)$et$(O_2; X_2; Y_2; Z_2)$ et caractérisés, espectivement, par les bases orthonormées $(\vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_1)$ et $(\vec{i}_2, \vec{j}_2, \vec{k}_2)$ . On considère que $R_2$ est en mouvement (quelconque) par rapport à $R_1$ et que ce mouvement est caractérisé par la vitesse angulaire $\vec{\omega}(R_2/R_1) = \vec{\omega}$.

Soit un vecteur $\vec{A}$ défini par son expression dans le repère relatif $R_2$ :

$$\vec{A} = x_2\vec{i}_2 + y_2\,\vec{j}_2 + z_2\,\vec{k}_2$$

Pour dériver le vecteur $\vec{A}$ par rapport au référentiel $R_1$ il faut dériver les composantes et les vecteurs de la base $(\vec{i}_2, \vec{j}_2, \vec{k}_2)$ mobile par rapport à $R_1$ :

$$\left(\frac{d\vec{A}}{dt}\right)_{/R_1} = \dot{x}_2\vec{\imath}_2 + \dot{y}_2\,\vec{\jmath}_2 + \dot{z}_2\,\vec{k}_2 + x_2\frac{d\vec{\imath}_2}{dt} + y_2\frac{d\vec{\jmath}_2}{dt} + z_2\frac{d\vec{k}_2}{dt}.$$

On a vu que la dérivée d'un vecteur unitaire $\vec{u}$ en rotation avec une vitesse angulaire $\vec{\omega}$ par rapport à un repère fixe est donnée par $\frac{d\vec{u}}{dt} = \vec{\omega} \wedge \vec{u}$. En remplaçant $\vec{u}$ par les vecteurs de la base $(\vec{\imath}_2, \vec{\jmath}_2, \vec{k}_2)$ on obtient alors :

$$\left(\frac{d\vec{A}}{dt}\right)_{/R_1} = \dot{x}\vec{\imath}_2 + \dot{y}\,\vec{\jmath}_2 + \dot{z}\,\vec{k}_2 + x_2(\vec{\omega}\wedge\vec{\imath}_2) + y_2(\vec{\omega}\wedge\vec{\jmath}_2) + z_2(\vec{\omega}\wedge\vec{k}_2).$$

Or $\dot{x}\vec{\imath}_2 + \dot{y}\,\vec{\jmath}_2 + \dot{z}\,\vec{k}_2 = \left(\frac{d\vec{A}}{dt}\right)_{/R_2}$ est la dérivée du vecteur $\vec{A}$ dans le référentiel relatif et

$$x_2(\vec{\omega}\wedge\vec{\imath}_2) + y_2(\vec{\omega}\wedge\vec{\jmath}_2) + z_2(\vec{\omega}\wedge\vec{k}_2) = \vec{\omega}\wedge\left(x_2\vec{\imath}_2 + y_2\,\vec{\jmath}_2 + z_2\,\vec{k}_2\right) = \vec{\omega}\wedge\vec{A}$$

Ce qui permet d'écrire la dérivée du vecteur $\vec{A}$ dans le référentiel $R_1$ connaissant son expression dans le référentiel$R_2$.

$$\left(\frac{d\vec{A}}{dt}\right)_{/R_1} = \left(\frac{d\vec{A}}{dt}\right)_{/R_2} + \vec{\omega}(R_2/R_1)\wedge\vec{A}$$

### *1.8 Composition des vitesses*

La loi de composition des vitesses s'écrit :

$$\vec{V}_a = \vec{V}_r + \vec{V}_e$$

Où

$\vec{V}_a = \vec{V}(M/R_1) = \left(\frac{d\overrightarrow{O_1M}}{dt}\right)_{/R_1}$ : est la vitesse absolue du point matériel,

$\vec{V}_r = \vec{V}(M/R_2) = \left(\frac{d\overrightarrow{O_1M}}{dt}\right)_{/R_2}$ : est la vitesse relative du point matériel,

$\vec{V}_e = \left(\frac{d\overrightarrow{O_1O_2}}{dt}\right)_{/R_1} + \vec{\omega}(R_2/R_1)\wedge\overrightarrow{O_2M}$: est la vitesse d'entrainement,

### *1.9 Composition des accélérations*

La loi de décomposition des accélérations s'écrit de la façon suivante

$$\vec{\gamma}_a = \vec{\gamma}_r + \vec{\gamma}_e + \vec{\gamma}_c$$

$$\vec{\gamma}_a = \vec{\gamma}(M)_{/R_1} = \left(\frac{d\vec{V}_a}{dt}\right)_{/R_2}$$

Est l'accélération absolue du point matériel,

$$\vec{\gamma}_r = \vec{\gamma}(M/R_2) = \left(\frac{d\vec{V}_r}{dt}\right)_{/R_2} = \left(\frac{d^2\overrightarrow{O_2M}}{dt^2}\right)_{/R_2}$$

Est l'accélération relative du point matériel,

$$\vec{\gamma}_e = \left(\frac{d^2\overrightarrow{O_1O_2}}{dt^2}\right)_{/R_2} + \frac{d\vec{\omega}(R_2/R_1)}{dt}\wedge\overrightarrow{O_2M} + \vec{\omega}(R_2/R_1)\wedge\left(\vec{\omega}(R_2/R_1)\wedge\overrightarrow{O_2M}\right)$$

Est l'accélération d'entrainement, et

$$\vec{\gamma}_c = 2\vec{\omega}(R_2/R_1)\wedge\vec{V}_r$$

Est l'accélération complémentaire, aussi appelée accélération de Coriolis.