Révision 3 —— SOLUTION — 2022

Exercice 1 : On considère trois grandeurs physiques P, Q et R. Sachant que P a la dimension d'une longueur, quelles doivent-être les dimensions de Q et R pour que l'opération $P - \sqrt[3]{Q} + R$ soit possible ?

Pour que l'opération soit possible, il faut que P, $\sqrt[3]{Q}$ et R aient la même dimension. Sachant que $[P] = L$, il faut donc que $[R] = L$ et $[\sqrt[3]{Q}\,] = L$ ou $[Q] = L^3$.

Exercice 2 : $\vec{A}$ et $\vec{B}$ sont deux vecteurs quelconques. Montrer, en s'appuyant uniquement sur les définitions du produit vectoriel et du produit scalaire, que $\vec{A} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = 0$.

Par définition du produit vectoriel $\vec{A} \times \vec{B}$ est un vecteur perpendiculaire à $\vec{A}$ et $\vec{B}$. Donc $(\vec{A} \times \vec{B})$ est perpendiculaire à $\vec{A}$. Or, on sait par définition que le produit scalaire de deux vecteurs perpendiculaires est nul, donc : $\vec{A} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = 0$.
On acceptera aussi la réponse qui consiste à écrire que (propriété du produit mixte) $\vec{A} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = (\vec{A} \times \vec{A}) \cdot \vec{B}$ et puisque d'après la définition du produit vectoriel $\vec{A} \times \vec{A} = \vec{0}$ alors $\vec{A} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = 0$.

Exercice 3 : Calculer le vecteur unitaire ayant la même direction et le même sens que le vecteur $\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$.

Le vecteur unitaire suivant le vecteur $\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ s'obtient en divisant ce dernier par son module :

$$\vec{u} = \frac{\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}}{\|\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}\|} = \frac{1}{\sqrt{3}}(\vec{i} + \vec{j} + \vec{k})$$

.

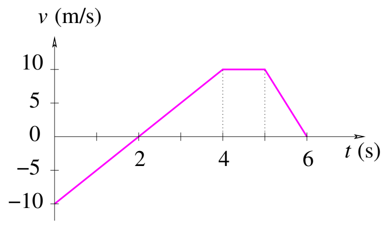
Exercice 4 : Que peut-on conclure sur les composantes de $\vec{A}$ et $\vec{B}$ si a) $\vec{A} = \vec{B}$; b) $\|\vec{A}\| = \|\vec{B}\|$.

a) Si $\vec{A} = \vec{B}$ alors $A_x = B_x$; $A_y = B_y$; $A_z = B_z$. b) Si $\|\vec{A}\| = \|\vec{B}\|$ alors $\sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2} = \sqrt{B_x^2 + B_y^2 + B_z^2}$

Exercice 5 : Étant donnés deux vecteurs $\vec{A} = \vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k}$ et $\vec{B} = 3\vec{i} + 4\vec{j}$. Calculer en degrés l'angle θ entre les deux vecteurs.

$$\cos\theta = \frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{\|\vec{A}\|\,\|\vec{B}\|} = \frac{1 \times 3 + 2 \times 4 + (-2 \times 0)}{\sqrt{9}\,\sqrt{25}} = \frac{11}{15} \implies \theta = \cos^{-1}\left(\frac{11}{15}\right) = 42.83°$$

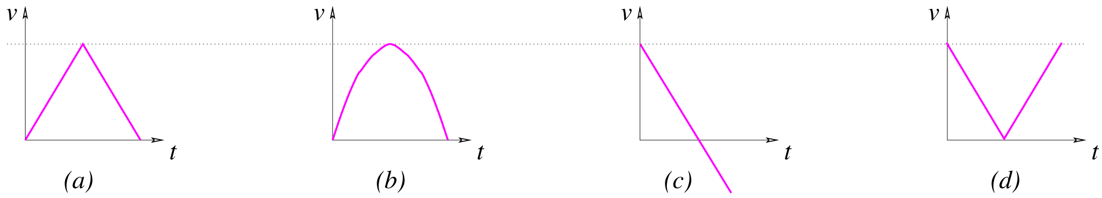
Exercice 6 : Trouver à partir du graphe $v(t)$ ci-contre : a) le vecteur vitesse moyenne entre $t = 0\,s$ et $t = 6\,s$. b) la vitesse scalaire moyenne pour le même intervalle de temps. La *vitesse scalaire* moyenne est définie comme la distance parcourue divisée par le temps mis pour la parcourir. On sait que $v_{moy} = \Delta x / \Delta t$. Mais attention, ici on vous demande d'utiliser le graphique ci-contre donnant v en fonction de t. a) On sait que pour avoir x il faut intégrer v. Sur le graphe, l'intégrale est donnée par l'aire (algébrique) de la surface comprise entre la courbe $v(t)$ et l'axe des t. L'aire vaut -10 entre $t = 0$ et $t = 2$; $+10$ entre $t = 2$ et $t = 4$; $+10$ entre $t = 4$ et $t = 5$; $+5$ entre $t = 5$ et $t = 6$. Donc, entre $t = 0$ et $t = 6$, le déplacement est $\Delta x = -10 + 10 + 10 + 5 = 15$ et $v_{moy} = 15/6 = 2.5\,\text{m/s}$. Pour la distance totale parcourue d, il faut prendre chaque parcourt effectué en valeur absolue, ce qui donne entre $t = 0\,\text{s}$ et $t = 6\,\text{s}$ $d = |-10| + |+10| + |+10| + |+5| = 35\,\text{m}$. La vitesse scalaire moyenne est donc $v_{scalmoy} = 35/6 = 5.83\,\text{m/s}$.



Exercice 7 : On lance une balle du toit d'un bâtiment haut de 44 m avec une vitesse initiale v_0 orientée suivant un angle θ en dessous de l'horizontale. La balle atterrit (arrive au sol) 2 s plus tard au point situé à 32 m de la base du bâtiment. Trouvez θ et v_0. Prendre g $= 9.8\,\mathrm{m/s^2}$.

On a : $v_0 \cos\theta \times 2 = 32 \implies v_0 \cos\theta = 16(i)$ et $0 = -9.8 \times 2^2/2 - v_0 \sin\theta \times 2 + 44 \implies v_0 \sin\theta = 12.2(ii)$. (ii)/(i) $\implies \tan\theta = (12.2/16) \implies \theta = 37.3°$ en dessous de l'horizontale. (i) $\implies v_0 = 16/\cos 37.3 = 20.1$m.

Exercice 8 : Une bille est lancée verticalement vers le haut puis elle retombe au sol. Lequel des graphes ci-dessous représente le mieux la variation de sa vitesse en fonction du temps ? Justifier.



Une fois lancée (avec une vitesse initiale v_0), la vitesse de la bille s'écrit : $v(t) = -gt + v_0$. Si on dessine la courbe $v(t)$ on obtiendra quelque chose de similaire au graphe (c). Le graphe (c) est donc celui qui représente le mieux la courbe de variation de $v(t)$.

Exercice 9 : Deux voitures A et B roulent, l'une vers l'autre, sur une même voie rectiligne, à des vitesses de 16 m/s et 8 m/s respespectivement. Lorsqu'elles sont à 45 m l'une de l'autre, les deux conducteurs actionnent les freins. Les deux voitures décélèrent alors aux taux de 2 m/s^2 pour A et de 4 m/s^2 pour B. a) Quand et où les deux voitures entrent en collision ? b) Si la voiture A pouvait freiner plus fortement, quelle devrait être la décélération minimale qui éviterait la collision ? c) Dans les mêmes conditions de vitesse et de décélération qu'en a), quelle distance minimale est nécessaire entre les deux voitures au moment où on actionne les freins pour que la collision n'ait pas lieu ?

À $t = 0$ on a : $x_{0A} = 0$, $x_{0B} = 45$m, $v_{0A} = 16$m/s, $v_{0B} = -8$m/s, $a_A = -2\mathrm{m/s^2}$, $a_B = +4\mathrm{m/s^2}$. Les équations horaires s'écrivent : $x_A = 16t - t^2$ (i) et $x_B = 45 - 8t + 2t^2$ (ii). a) Quand et où les deux voitures entrent en collision ? $x_A = x_B$ mène à l'équation $3t^2 - 24t + 45 = 0$ qui fournit deux racines : $t = 3$s et $t = 5$s. Laquelle des deux correspond au temps où les deux entrent en collision ? En fait, aucune des deux n'est valable. Pourquoi ? En fait, en décélérant au taux de 4 m/s^2 la vitesse de la voiture B va décroitre jusqu'à s'annuler au temps t_b tel que : $v_B = -8 + 4t_b = 0 \implies t_b = 2\,$s. À ce moment-là, la voiture B se trouve à (d'après l'équation (ii)) $x_B = 37\,$m. Elle restera là jusqu'à ce que la voiture A vienne la percuter. L'équation à résoudre est donc $16t - t^2 = 37$. On obtient les racines $t = 2.8\,$s et $t = 13.2\,$s. La collision aura lieu à $t = 2.8\,$s et à 37 m. On rejette $t = 13.2\,$s car la collision n'a lieu qu'une seule fois. b) B étant déjà à l'arrêt à la position $x_B = 37\,$m, pour éviter la collision, la voiture A doit freiner avec une décélération a_A tel qu'elle puisse s'arrêter, à instant t_a, avant de toucher la voiture B : $16t_a + a_A t_a^2/2 \leq 37$ (iii) et $16 + a_A t_a = 0$ (iv). De (iv), on tire $t_a = -16/a_A$ et par substitution dans (iii) on obtient : $a_A \leq -16^2/(2 \times 37) \approx -3.46\mathrm{m/s^2}$. La décélération minimale doit être de $3.46\mathrm{m/s^2}$. c) À partir du moment où les freins sont actionnés, la voiture A roule (s'il n'y a pas d'obstacle) jusqu'à s'immobiliser : $v_A = 16 - 2t_c = 0 \implies t_c = 8\,$s et aura alors parcouru une distance de $x_A(8) = 16 \times 8 - 8^2 = 64\,$m pendant que B aura parcouru $|x(t_b) - x_{0B}| = 8\,$m avant de s'immobiliser. Pour éviter la collision, la distance minimale doit être de $64 + 8 = 72\,$m.

Exercice 10 : Un point matériel M se déplace sur un axe $x'Ox$ suivant l'équation horaire $x(t) = 3t^2 - t^3$, où x est en mètres et t en secondes. a) Montrer que M inverse le sens de son mouvement à un instant t_{inv} que l'on calculera. b) Calculer la distance totale parcourue et le déplacement total effectué par M durant les 4 premières secondes. c) Quelle est la vitesse et l'accélération de M à $t = 4\,$s. d) Calculer la vitesse moyenne de M entre les instants $t = 0\,\text{s}$ et $t = 4\,\text{s}$. e) Calculer la vitesse *scalaire* moyenne de M entre les instants $t = 0\,\text{s}$ et $t = 4\,\text{s}$.

a) À une dimension, quand la vitesse instantanée d'un mobile M s'annule et change de signe, cela signifie que M inverse le sens de son mouvement. (*Une bonne illustration est celle d'un objet lancé verticalement vers le haut*). Dans le cas présent, on a $v = dx/dt = 6t - 3t^2 = t(6 - 3t)$. Le signe de v est celui de $6 - 3t$ puisque t est positif. Donc v s'annule à l'instant $t_{inv} = 2\,\text{s}$ en passant de $+$ à $-$. En d'autres termes, M va dans le sens positif de l'axe $x'Ox$ pendant les 2 premières secondes, puis à $t_{inv} = 2\,\text{s}$ sa vitesse s'annule instantanément et continue son mouvement dans le sens inverse jusqu'à $-\infty$. Tout ce qui est dit plus haut peut être résumé dans le tableau de variation ci-dessous :

t	0		2		$+\infty$
signe de $v(t) = t(6 - 3t)$		$+$	0	$-$	
$x(t) = 3t^2 - t^3$	0	$\nearrow$	4	$\searrow$	$-\infty$

b) De ce qui précède, on déduit que M part de l'origine O ($x = 0$) à $t = 0\,\text{s}$, se dirige dans le sens positif et arrive à la position M_1 ($x = 4$) à $t = 2\,\text{s}$. Puis il va en sens inverse et à $t = 4\,\text{s}$ il rejoint la position M_2 ($x = -16$). On déduit que la distance totale parcourue, pendant les 4 premières secondes, est

$d = OM_1 + M_1M_2 = 4 + 20 = 24\,\text{m}$. Dans le même temps, le déplacement total effectué est donné par : $D = \overline{OM_2} = -16\,\text{m}$. c) $v(t) = 6t - 3t^2 \rightarrow v(t = 4) = -24\,\text{m/s}$; $a(t) = 6 - 6t \rightarrow a(t = 4) = -18\,\text{m/s}^2$. d) $v_{moy} = D/4 = -16/4 = -4\,\text{m/s}$; $v_{scalmoy} = d/4 = 24/4 = 6\,\text{m/s}$.

——————— *FiN*