2.2 Application

Soient E et F deux ensembles.

Définition 2.7. *Une application $f : E \longrightarrow F$, c'est définie pour chaque élément $x \in E$, un unique élément de F noté $f(x)$, où E est l'ensemble de départ et F est l'ensemble d'arrivé.*

Exemple 2.7. *1.*

$$\begin{aligned} f \ : \ \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x) = x \end{aligned}$$

f est une application.

2.

$$\begin{aligned} g \ : \ \mathbb{N} &\longrightarrow \mathbb{N} \\ n &\longmapsto f(n) = n - 1. \end{aligned}$$

g n'est pas une application.

Remarques 2.1. *1. Le graphe de $f : E \longrightarrow F$ est*

$$\Gamma_f = \{(x; y) \in E \times F \,/\, y = f(x)\}.$$

2. Soit $f : E \longrightarrow F$ et $g : G \longrightarrow H$ deux applications. $f = g$ si et seulement si $E = G$ et $F = H$ et $\forall x \in E, f(x) = g(x)$.

3. Soit $f : E \longrightarrow F$ une application. Fixons $y \in F$, tout élément $x \in E$ tel que $y = f(x)$ est un antécédent de y.

Notation 2.2. *1. On note $\mathcal{F}(E, F)$ l'ensemble de toutes les applications de E dans F.*

2. On note id l'application identité

$$\begin{aligned} id \ : \ E &\longrightarrow F \\ x &\longmapsto f(x) = x \end{aligned}$$

2.3 Image directe et image réciproque

Soient E et F deux ensembles.

Définition 2.8. *(Image directe) Soit $A \subset E$ et $f : E \longrightarrow F$, l'image directe de A par f est l'ensemble :*

$$f(A) = \{f(x) \,/\, x \in A\} \subset F.$$

Définition 2.9. *(Image réciproque) Soit $B \subset F$ et $f : E \longrightarrow F$, l'image réciproque de A par f est l'ensemble :*

$$f^{-1}(B) = \{x \in E \,/\, f(x) \in B\} \subset E.$$

Exemple 2.8. *1. Soit f une application*

$$\begin{aligned} f \;:\; & \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} \\ & x \longmapsto f(x) = 2x+1 \end{aligned}$$

Soit $A = \{0, 1, 2\}$, alors

$$\begin{aligned} f(A) &= \{f(x) \,/\, x \in A\} \\ &= \{f(0), f(1), f(2)\} \\ &= \{1, 3, 5\}. \end{aligned}$$

Soit $B = \{5\}$, alors

$$\begin{aligned} f(A) &= \{f(x) \,/\, x \in A\} \\ &= \{f(0), f(1), f(2)\} \\ &= \{1, 3, 5\}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f^{-1}(B) &= \{x \in E \,/\, f(x) \in B\} \\ &= \{x \in E \,/\, f(x) = 5\} \\ &= \{2\}. \end{aligned}$$

Propriétés 2.3. *Soit $f : E \longrightarrow F$ une application. Soient A_1 et A_2 deux parties de E. Alors,*

1. $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$.
2. $f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2)$.
3. $A_1 \subset A_2 \Longrightarrow f(A_1) \subset f(A_2)$.
4. $A_1 \subset f^{-1}(f(A_1))$.

Soient B_1 et B_2 deux parties de F.

1. $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$.
2. $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$.
3. $B_1 \subset B_2 \Longrightarrow f^{-1}(B_1) \subset f^{-1}(B_2)$.

2.4 Injection

Définition 2.10. *Soit $f : E \longrightarrow F$ une application. On dit que f est injective (ou une injection) si tout élément de F admet au plus un antécédent, i.e.,*

$$\forall x, x' \in E : f(x) = f(x') \Longrightarrow x = x'.$$

Ou

$$\exists x, x' \in E : x \neq x' \Longrightarrow f(x) \neq f(x').$$

Exemple 2.9. *1.*

$$\begin{aligned} f \ : \ & \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} \\ & n \longmapsto 2n+1 \end{aligned}$$

f est injective car :

$$\begin{aligned} \forall n, n' \in E : f(n) = f(n') &\Longrightarrow 2n+1 = 2n'+1 \\ &\Longrightarrow 2n = 2n' \\ &\Longrightarrow n = n'. \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} g \ : \ & \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ & x \longmapsto 5x+3 \end{aligned}$$

g est injective car :

$$\begin{aligned} \forall x, x' \in E : f(x) = f(x') &\Longrightarrow 5x+3 = 5x'+3 \\ &\Longrightarrow 5x = 5x' \\ &\Longrightarrow x = x'. \end{aligned}$$

2.5 Surjection

Définition 2.11. *Soit $f : E \longrightarrow F$ une application. On dit que f est surjective (ou une surjection) si tout élément de F admet un antécédent, i.e.,*

$$\forall y \in F, \exists x \in E : f(x) = y.$$

Exemple 2.10. *1.*

$$\begin{aligned} f \quad : \quad & \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} \\ & n \longmapsto 2n+1 \end{aligned}$$

f n'est pas surjective, en effet si on suppose qu'elle est surjective c'est à dire

$$\begin{aligned} \forall y \in \mathbb{N}, \exists n \in \mathbb{N} : f(n) = y. & \implies 2n+1 = y \\ & \implies n = \tfrac{y-1}{2} \notin \mathbb{N} \text{ contradiction } . \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} f \quad : \quad & \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} \\ & n \longmapsto 2n+1 \end{aligned}$$

g est surjective car :

$$\begin{aligned} \forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R} : f(x) = y & \implies 5x+3 = y \\ & \implies x = \tfrac{y-3}{5} \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

2.6 Bijection

Définition 2.12. *Soit $f : E \longrightarrow F$ une application. On dit que f est bijective (ou une bijection) si f est à la fois surjective et injective, i.e.,*

$$\forall y \in F, \exists!\, x \in E : f(x) = y.$$

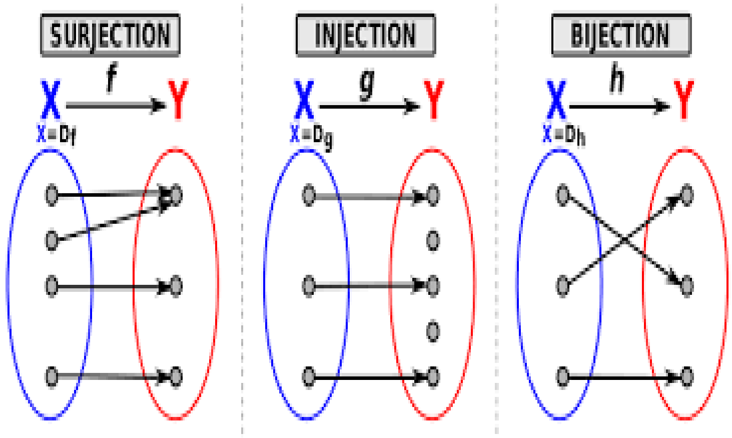
C'est- à-dire tout élément de F a un unique antécédent par f.

Exemple 2.11. *1.*

$$\begin{aligned} f \quad : \quad & \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} \\ & n \longmapsto 2n+1 \end{aligned}$$

f n'est pas bijective car elle n'est pas surjective.

2. g est bijective.



2.7 La composition d'application

Définition 2.13. *Soient E, F, G trois ensembles et f, g deux applications telles que :*

$$E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} G$$

On peut déduire une application de E dans G notée $g \circ f$ et appelée application composée de f et g, par

$$\forall x \in E, g \circ f(x) = g(f(x)).$$

Exemple 2.12. *Soit*

$$\begin{aligned} f \quad : \quad & \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ & x \longmapsto x^2 + 1 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} g \quad : \quad & \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R} \\ & x \longmapsto \sqrt{x}, \end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned} g \circ f \quad : \quad & \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ & x \longmapsto \sqrt{x^2 + 1}. \end{aligned}$$

Propositions 2.1. *Soit $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$ deux applications.*

1. *La composée de deux injections est une injection, i.e.,*

   (Si f et g sont injectives, alors $g \circ f$ est injective).

2. *La composée de deux surjections est une surjection, i.e.,*

   (Si f et g sont surjectives, alors $g \circ f$ est surjective).

3. *La composée de deux bijections est une bijection, i.e.,*

   (Si f et g sont bijectives, $g \circ f$ est bijective).

4. *Si f et g sont bijectives. Alors*

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}.$$

Démonstration. 1. Supposons que f et g sont injectives, montrons que $g \circ f$ est injective.

$$\forall x_1, x_1 \in E,\ (g \circ f)(x_1) = g \circ f(x_2)$$

puisque g est injective on aura :

$$g(f(x_1)) = g(f(x_2)) \Longrightarrow f(x_1) = f(x_2),$$

puisque f est injective ainsi :

$$(g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2) \Longrightarrow x_1 = x_2,$$

alors $g \circ f$ est injective.

□

Propositions 2.2. 1. *Si $g \circ f$ est injective, alors f est injective.*

2. *Si $g \circ f$ est surjective, alors f est surjective.*

3. *Si $g \circ f$ est bijective, alors f est injective et g est surjective.*

Remarque 2.5. *Lorsque une application f est bijective cela veut dire que l'application réciproque f^{-1} existe. f^{-1} est aussi bijective de F sur E et $(f^{-1})^{-1} = f$.*

Proposition 2.1. *Si $f : E \longrightarrow F$ est une bijection, alors*

$$f^{-1} \circ f = Id_E \text{ et } f \circ f^{-1} = Id_F.$$