TD n°1 : Solution

Exercices avec solution sur les vecteurs, L1 SCMI ——— Novembre 2021

Cette série de questions se rapporte au 1er chapitre. J'ai coché les bonnes réponses. À vous de vous convaincre de toutes les réponses cochées. Par exemple, à la question 28, j'ai choisi la réponse est c). Je vais vous montrer par un calcul détaillé que la réponce c) est effectivement la bonne réponse.

Solution Question 28 : $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c} \implies (\vec{a} + \vec{b})^2 = (\vec{c})^2 \to a^2 + b^2 + 2ab\cos(\widehat{\vec{a},\vec{b}}) = c^2 \implies 144 + 25 + 120\cos(\widehat{\vec{a},\vec{b}}) = 169 \implies 169 + 120\cos(\widehat{\vec{a},\vec{b}}) = 169 \implies 120\cos(\widehat{\vec{a},\vec{b}}) = 0 \implies \cos(\widehat{\vec{a},\vec{b}}) = 0 \implies (\widehat{\vec{a},\vec{b}}) = \pi/2$. Donc il faut cocher la réponse c).

Question 1 – P et Q sont deux grandeurs physiques possédant des dimensions différentes, i.e. $[P] \neq [Q]$. Parmi les opérations ci-dessous, lesquelles sont possibles ?

- ☐ 1) $P - Q$;
- ☑ 2) PQ ;
- ☐ 3) $1 - P/Q$;
- ☐ 4) Aucune des réponses ci-dessus.

Solution : Ayant des dimensions différentes, les deux grandeurs physiques ne peuvent pas s'additionner ou se soustraire. Pour cette raison, l'opération 1) n'est pas possible. L'opération 3) peut s'écrire $(Q - P)/Q$ et n'est donc pas possible pour la même raison. Les deux grandeurs peuvent, en revanche, se multiplier. Donc, la réponse est 2).

Question 2 – P et Q sont deux grandeurs physiques possédant la même dimension, i.e. $[P] = [Q]$. Parmi les opérations ci-dessous, lesquelles sont possibles ?

- ☑ 1) $P - Q$;
- ☑ 2) PQ ;
- ☑ 3) $1 - P/Q$;
- ☐ 4) Aucune des réponses ci-dessus.

Solution : Puisque les deux grandeurs ont la même dimension, on peut les additionner, les soustraire, les multiplier ou les diviser. Donc, les bonnes réponses sont 1), 2) et 3).

Question 3 – Une des mesures sanitaires par ces temps de covid-19 est de respecter une distance d'au minimum 1 m entre les individus. La distance est une grandeur scalaire car

- ☑ a) pour l'exprimer on n'a pas besoin de spécifier une direction ou une orientation. On n'a besoin que d'un nombre suivi, en général, d'une unité ;
- ☐ b) pour l'exprimer on a besoin d'un nombre, d'une direction et d'une orientation ;
- ☐ c) une distance peut être un vecteur ;
- ☐ d) une distance ne peut pas être calculée à partir d'un vecteur.

Solution : Une grandeur scalaire (voir chapitre 1) est une grandeur complètement déterminée à l'aide d'un nombre suivi éventuellement d'une unité de mesure. Elle n'a besoin d'une direction. D'où la réponse a).

Question 4 – Pour se rendre à une position B à partir d'une position initiale A, on a besoin de savoir dans quelle direction et à quelle distance se trouve B. Le déplacement de A à B est un vecteur car

- ☐ a) pour l'exprimer, on n'a pas besoin de connaître la distance (entre A et B ici) ;
- ☐ b) pour l'exprimer, il suffit de connaître la distance (entre A et B ici) ;
- ☐ c) pour l'exprimer, on n'a pas besoin de connaître la direction ;
- ☑ d) pour l'exprimer on a besoin de spécifier une direction (direction AB ici) et un sens (sens A

vers B ici), en plus de la distance (distance entre A et B ici).

Solution : Une déplacement a besoin d'une distance, d'une direction et d'un sens, d'où la réponse d).

Question 5 – Parmi les quantités suivantes, lesquelles sont des scalaires ? Le rayon d'un cercle, le temps, la force, la superficie, la masse, le poids, la température, le moment d'inertie, le moment d'une force, la résistance électrique, le champ électrique, le volume, la capacité de stockage d'un disque dur, le champ magnétique, l'énergie cinétique, l'accélération centripète, l'énergie potentielle, la pression.

- ☐ a) Le rayon d'un cercle, la force, la superficie, la masse, le poids, le moment d'inertie ;
- ☐ b) le poids, le moment d'une force, la force, le champ électrique, accélération centripète ;
- ☑ c) Rayon d'un cercle, le temps, la superficie, la masse, le moment d'inertie, la résistance électrique, le volume, la capacité de stockage d'un disque dur, l'énergie cinétique, l'énergie potentielle, la pression ;
- ☐ d) Le rayon d'un cercle, le temps, la superficie, la masse, la température, le moment d'inertie, la résistance électrique, le volume, la capacité de stockage d'un disque dur, l'énergie cinétique, l'accélération centripète, l'énergie potentielle, la pression.

Solution : Ce n'est pas la réponse a) car la force est un vecteur. Ce n'est pas la réponse b) car toutes les quantités proposées sont des vecteurs. Ce n'est pas la réponse d) car l'accélération centripète est un vecteur. Parmi les quantités proposées, la réponse c) contient tous les scalaires, d'où la réponse c).

Question 6 – Étant donné deux vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ tels que $\vec{a} = -\vec{b}$. De cette égalité, on déduit que les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$

- ☑ a) ont même module ;
- ☐ b) ont des modules différents ;
- ☐ c) sont dans la même direction ;
- ☑ d) sont dans des directions opposées.

Solution : Si $\vec{a} = -\vec{b}$, alors les deux vecteurs ont même module $\|\vec{a}\| = \|-\vec{b}\|$ et des directions opposées ; d'où les réponses a) et d).

Question 7 – Parmi les vecteurs suivants, lesquels sont des vecteurs nuls ?

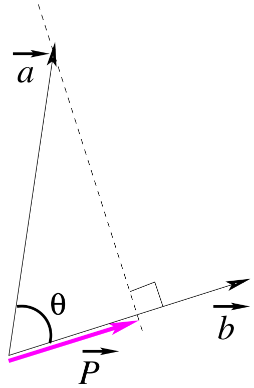
- ☐ a) vecteur vitesse d'un corps en mouvement uniforme sur un cercle ;
- ☐ b) vecteur vitesse d'un corps en mouvement rectiligne uniforme ;
- ☑ c) vecteur position de l'origine d'un système de coordonnées ;
- ☑ d) vecteur déplacement d'un objet immobile.

Solution : Un vecteur nul est un vecteur dont l'origine est confondu avec son extrémité ; d'où les réponses c) et d). **Question 8** – Comment doit-on disposer deux vecteurs non nuls pour que leur somme donne une résultante de longueur minimale ?

- ☐ a) perpendiculairement ;
- ☐ b) parallèlement et dans le même sens ;
- ☑ c) parallèlement mais de sens contraires ;
- ☐ d) à 45° l'un de de l'autre.

Solution : L'addition de deux vecteurs montre que la résultante est de longueur minimale quand les deux vecteurs sont parallèles et de sens contraires ; d'où la réponse c)

Question 9 – Dans la figure ci-dessous, le vecteur $\vec{P}$ représente la projection orthogonale de $\vec{a}$ sur $\vec{b}$. Si a et b désignent les modules de $\vec{a}$ et $\vec{b}$ respectivement, $\vec{P}$ s'exprime par



☑ a) $\vec{P} = a\cos\theta\,\frac{\vec{b}}{b}$;

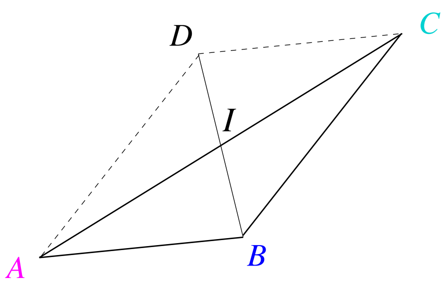
☐ b) $\vec{P} = b\cos\theta\,\frac{\vec{b}}{a}$;

☐ c) $\vec{P} = (\vec{a}\cdot\vec{b})\,\frac{\vec{b}}{a}$;

☑ d) $\vec{P} = \left(\vec{a}\cdot\frac{\vec{b}}{b}\right)\frac{\vec{b}}{b}$.

Solution : Si θ désigne l'angle entre $\vec{a}$ sur $\vec{b}$, le vecteur projeté orthogonal de $\vec{a}$ sur $\vec{b}$ vaut $a\cos\theta$ multiplié par le veteur unitaire suivant $\vec{b}$, c'est-à-dire $\vec{P} = a\cos\theta\,\frac{\vec{b}}{b}$. En utilisant la définition du produit scalaire, on montre que $a\cos\theta = \vec{a}\cdot\frac{\vec{b}}{b}$, d'où les choix a) et d).

Question 10 – Les points A et C étant donnés, pour tout point B, on a



☑ a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ (origine du 1er vers l'extrémité 2ème vecteur → relation de Chasles)

☑ b) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB}$ (extrémité du 2ème vers l'extrémité du 1er vecteur)

☑ c) $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC}$;

☑ d) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{AA} = \vec{0}$.

Solution : a) réponse correcte (relation de Chasles). b) réponse correcte car $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CB}$. c) réponse correcte (se démontre comme b). d) réponse correcte (relation de Chasles).

Question 11 – Sur la figure de l'exercice 10, on a aussi

☑ a) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ et $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$;

☑ b) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AC}$;

☑ c) $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BD}$;

☑ d) $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IC} = \vec{0}$ et $\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{ID} = \vec{0}$.

Question 12 – Étant donné trois vecteurs $\vec{a}$, $\vec{b}$ et $\vec{c}$ tels que $\vec{c}$ est perpendiculaire au plan $(\vec{a}, \vec{b})$. Lesquels parmi les relations suivantes sont possibles ?

☑ a) $\vec{a}\times\vec{b} = \vec{c}$;

☑ b) $\vec{a}\times\vec{b} = -\vec{c}$;

☐ c) $\vec{a}+\vec{b} = \vec{c}$;

☐ d) $\vec{a}+\vec{b} = -\vec{c}$.

Solution : Le produit vectoriel de deux vecteurs est un vecteur perpendiculaire au plan des deux vecteurs. Sachant que $\vec{c}$ est perpendiculaire au plan $(\vec{a}, \vec{b})$ les réponses possibles sont donc a) et b). Les réponses c) et d) ne sont pas possibles car ces relations impliquent que $\vec{c}$ doit être dans le plan $(\vec{a}, \vec{b})$.

Question 13 – Étant donné deux vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$. Leur produit scalaire s'annule si

☑ a) $\vec{a}$ est nul et $\vec{b}$ non nul ;

☑ b) $\vec{b}$ est nul et $\vec{a}$ non nul ;

☑ c) $\vec{a}$ et $\vec{b}$ sont tous les deux nuls ;

☑ d) $\vec{a}$ et $\vec{b}$ sont non nuls et perpendiculaires entre eux .

Solution : voir le cours sur le produit scalaire.

Question 14 – Étant donné deux vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ faisant un angle θ entre eux (on parle de l'angle compris entre 0° et 180°). Leur produit vectoriel $\vec{a}\times\vec{b}$

☑ a) est, par définition, donné par $ab\sin\theta\vec{n}$, $\vec{n}$ étant un vecteur unitaire directement perpendiculaire à $\vec{a}$ et $\vec{b}$;

☑ b) peut se calculer, dans une base orthonormée directe $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\,)$, à l'aide de $\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_i & a_j & a_k \\ b_i & b_j & b_k \end{vmatrix}$;

☑ c) représente, en module, l'aire du parallélogramme construit sur les deux vecteurs ;

☑ d) est anti-commutatif : $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$.

Solution : voir le cours sur le produit scalaire.

Question 15 – Étant donné deux vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$. Leur produit vectoriel s'annule si

☑ a) $\vec{a}$ est nul et $\vec{b}$ non nul ;

☑ b) $\vec{b}$ est nul et $\vec{a}$ non nul ;

☑ c) $\vec{a}$ et $\vec{b}$ sont tous les deux nuls ;

☑ d) $\vec{a}$ et $\vec{b}$ sont non nuls et parallèles entre eux .

Solution : voir le cours sur le produit scalaire.

Question 16 – Étant donné trois vecteurs $\vec{a}$, $\vec{b}$ et $\vec{c}$. Le double produit vectoriel $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$ est égal à

☑ a) $(\vec{b} \cdot \vec{a})\,\vec{c} - (\vec{c} \cdot \vec{a})\,\vec{b}$;

☐ b) $(\vec{b} \cdot \vec{a})\,\vec{c} + (\vec{c} \cdot \vec{a})\,\vec{b}$;

☐ c) $(\vec{b} \times \vec{a}) \cdot \vec{c} - (\vec{c} \times \vec{a}) \cdot \vec{b}$;

☐ d) $(\vec{b} \times \vec{a})\,\vec{c} + (\vec{c} \times \vec{a}) \cdot \vec{b}$.

Solution : Utilisez la relation (1.19) du cours pour $(\vec{b} \times \vec{c})$, puis la relation (1.21) pour $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$. Réarrangez ensuite les différents termes pour obtenir la forme proposée à la réponse a).

Question 17 – Étant donné trois vecteurs $\vec{a}$, $\vec{b}$ et $\vec{c}$. Le produit mixte $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$ s'annule si

☑ a) l'un des trois vecteurs est nul ;

☐ b) un des des trois vecteurs est perpendiculaire au plan des deux autres ;

☑ c) deux des trois sont parallèles ;

☑ d) les trois vecteurs sont dans le même plan.

Solution : voir le cours sur le produit scalaire.

Question 18 – Étant donné trois vecteurs $\vec{a}$, $\vec{b}$ et $\vec{c}$ non nuls, non colinéaires et ne se trouvant pas dans le même plan. Alors

☐ a) on peut écrire $\vec{c} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$, α et β réels ;

☑ b) leur produit mixte est différent de 0 ;

☑ c) les trois vecteurs sont linéairement indépendants ;

☑ d) il est impossible d'exprimer l'un comme une combinaison des deux autres.

Solution : On ne peut pas écrire un vecteur comme une combinaison de deux autres vecteurs si le vecteur n'est pas dans le plan des deux autres vecteurs, donc la réponse a) n'est pas correcte. Sachant que le produit mixte représente le volume du parallélépipède formé par les trois vecteurs, ce volume n'est pas nul quand les trois vecteurs ne sont pas dans le même plan. La réponse b) est donc correcte. Les ne se trouvant pas dans le même plan, ils sont forcément linéairement indépendants. Cela signifie qu'il est impossible de trouver trois nombres réels r_1, r_2 , r_3 tels que $r_1\vec{a} + r_2\vec{b} + r_3\vec{c} = \vec{0}$. La réponse c) est donc correcte. La réponse d) est correcte également car elle exprime le contraire de a).

Question 19 – Si $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{c}$, lesquelles des propositions suivantes sont correctes ?

☑ a) $\vec{c}$ est perpendiculaire à $\vec{a}$;

☑ b) $\vec{c}$ est perpendiculaire à $\vec{b}$;

☑ c) $\vec{c}$ est perpendiculaire à $\vec{a}$ et à $\vec{b}$;

☐ d) $\vec{c}$ est dans le plan de $\vec{a}$ et $\vec{b}$.

Solution : Par définition, le produit vectoriel deux vecteurs donne un vecteur perpendiculaire aux deux vecteurs. Les choix corrects sont donc a), b) et c).

Question 20 – Soient trois points $A(-2, 1, 5)$, $B(1, 3, 5)$ et $C(-1, 3, 1)$ rapportés à un repère orthonormé direct $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Les coordonnées sont en mètres. Le volume du parallélépipède construit sur les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AO}$ vaut

- ☑ a) $48\,\mathrm{m}^3$;
- ☐ b) $-48\,\mathrm{m}^3$;
- ☐ c) $AB \times AC \times AO$;
- ☐ d) $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AO}$.

Solution : Le volume est donné par le produit mixte $\overrightarrow{AB}\cdot(\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AO})$ *avec* $\overrightarrow{AB} = 3\vec{i}+2\vec{j}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{i}+2\vec{j}-4\vec{k}$, $\overrightarrow{AO} = 2\vec{i}-\vec{j}-5\vec{k}$. *On trouve* $48\,\mathrm{m}^3$ *d'où le choix a).*

Question 21 – On reprend les données de la question 20. La distance de O au plan (ABC) vaut

- ☐ a) $48\,\mathrm{m}$;
- ☐ b) $-48\,\mathrm{m}$;
- ☑ c) $12/\sqrt{14}\,\mathrm{m}$;
- ☑ d) $6\sqrt{2/7}\,\mathrm{m}$.

Solution : La distance de O *au plan* (ABC) *est donnée par* $d = OH$ *où* H *désigne le projeté orthogonal de* O *sur le plan* (ABC). *Mais* $OH = |OA\cos\theta|$, *relation qui s'écrit aussi* $OH = |\overrightarrow{OA}\cdot\vec{n}|$ *où* θ *est l'angle entre* $\overrightarrow{OH}$ *et* $\overrightarrow{OA}$ *et* $\vec{n}$ *est un vecteur unitaire normal au plan. Pour obtenir un vecteur normal au plan, il suffit de prendre le produit vectoriel de deux vecteurs du plan :* $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC} = -4(2\vec{i}-3\vec{j}-\vec{k})$. *On le rend ensuite unitaire en le divisant par son module :* $\vec{n} = (2\vec{i}-3\vec{j}-\vec{k})/\sqrt{14}$ *et par suite* $d = |\overrightarrow{OA}\cdot\vec{n}| = |(-4-3-5)/\sqrt{14}| = 12/\sqrt{14}$. *D'où le choix c). Mais* $12/\sqrt{14} = 6\sqrt{2/7}$, *le choix d) est également correct.*

Question 22 – Soit $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ les vecteurs unitaires respectifs des axes orthogonaux x, y, z. Le vecteur $3\vec{i}+4\vec{j}-5\vec{k}$ a pour module

- ☐ a) 2 ;
- ☐ b) 50 ;
- ☑ c) $5\sqrt{2}$;
- ☐ d) 0.

Solution : $\|3\vec{i}+4\vec{j}-5\vec{k}\| = \sqrt{9+16+25} = \sqrt{25\times 2} = 5\sqrt{2}$, *d'où le choix c).*

Question 23 – L'angle entre Le vecteur $3\vec{i}+4\vec{j}-5\vec{k}$ et l'axe z vaut

- ☐ a) 45° ;
- ☑ b) 135° ;
- ☐ c) −45° ;
- ☐ d) 75° .

Solution : $\theta = \cos^{-1}((3\vec{i}+4\vec{j}-5\vec{k})\cdot\vec{k})/(\|3\vec{i}+4\vec{j}-5\vec{k}\|\|\vec{k}\|) = \cos^{-1}(-1/\sqrt{2}) = 135°$, *d'où le choix b).*

Question 24 – Soit le vecteur $\vec{V} = p\vec{i}+\frac{1}{2}\vec{j}+\frac{1}{2}\vec{k}$. Que vaut p si $\vec{V}$ est unitaire ?

- ☐ a) $p = \pm 1$;
- ☐ b) $p = \pm 1/2$;
- ☐ c) $p = \pm 1/4$;
- ☑ d) $p = \pm 1/\sqrt{2}$.

Solution : $\|\vec{V}\| = 1 \implies p^2+1/4+1/4 = 1 \implies p^2 = 1/2 \implies p = \pm\sqrt{1/2} = \pm 1/\sqrt{2}$, *d'où le choix d).*

Question 25 – On donne les vecteurs $\vec{A} = -\vec{j}+2\vec{k}$ et $\vec{B} = \vec{i}-2\vec{j}+\vec{k}$. Leur produit scalaire vaut

- ☐ a) 0 ;
- ☐ b) 2 ;
- ☑ c) 4 ;
- ☐ d) 8 .

Solution : $\vec{A}\cdot\vec{B} = (0)(1)+(-1)(-2)+(2)(1) = 4$, *d'où le choix c).*

Question 26 – Le produit vectoriel des vecteurs $\vec{A}$ et $\vec{B}$ de la question 25 vaut

- ☐ a) $3\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k}$;
- ☑ b) $3\vec{i}+2\vec{j}+\vec{k}$;
- ☐ c) $3\vec{i}-2\vec{j}+\vec{k}$;
- ☐ d) $-3\vec{i}+2\vec{j}+\vec{k}$.

Solution : $\vec{A}\times\vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 3\vec{i}+2\vec{j}+\vec{k}$, *d'où le choix b).*

Question 27 – On reprend les vecteurs $\vec{A}$ et $\vec{B}$ de la question 25 et on considère un troisième vecteur $\vec{C} = -2\vec{i}+\vec{j}+t\vec{k}$. Pour quelle valeur de t, le vecteur $\vec{C}$ se trouve dans le même plan que $\vec{A}$ et $\vec{B}$ tout en étant perpendiculaire à $\vec{B}$?

- ☐ a) 0 ;
- ☑ b) 4 ;
- ☐ c) -4 ;
- ☐ d) -2 .

Question 28 – Soit $\vec{a}$, $\vec{b}$ et $\vec{c}$ trois vecteurs tels que $\vec{a}+\vec{b}=\vec{c}$ et $a = 12$, $b = 5$ et $c = 13$. L'angle entre $\vec{a}$ et $\vec{b}$ vaut

- ☐ a) 0 ;
- ☐ b) π ;
- ☑ c) $\pi/2$;
- ☐ d) $\pi/4$.

Solution : voir la solution au début de la série.

Question 29 – Soit $\vec{a}$ un vecteur qui quand il est ajouté à la résultante des vecteurs $2\vec{i}-3\vec{j}+4\vec{k}$ et $\vec{i}+5\vec{j}+2\vec{k}$ donne un vecteur unitaire suivant l'axe y dans le sens $+$. Alors le vecteur $\vec{a}$ vaut

- ☑ a) $-3\vec{i}-\vec{j}-6\vec{k}$;
- ☐ b) $3\vec{i}+\vec{j}-6\vec{k}$;
- ☐ c) $3\vec{i}-\vec{j}+6\vec{k}$;
- ☐ d) $3\vec{i}+\vec{j}+6\vec{k}$.

Solution : On doit avoir simultanément $a_x+2+1=0$, $a_y+2=1$ *et* $a_z+6=0$. *On déduit* $a_x=-3, a_y=-1, a_z=-6$ *; d'où le choix a).*