Université de Batna 2
Faculté des Mathématiques et d'informatique
Département Socle Commun Mathématiques et Informatique
1re année MI/Module : Analyse 01
Année Universitaire 2021/2022

Série de Td N :-01 (Nombres réels)

Exercice 01 :
Soient $x, y, z \in \mathbb{R}$, démontrer les inégalités suivantes :

1. $|x| + |y| \leq |x+y| + |x-y|$
2. $1 + |xy - 1| \leq (1 + |x-1|)(1 + |y-1|)$
3. $\sqrt{x^2 + y^2} \leq |x| + |y|$
4. $xy \leq \dfrac{1}{2}(x^2 + y^2)$
5. $xy + yz + xz \leq x^2 + y^2 + z^2$

Exercice 02 :

1. Montrer que $\sqrt{2}$ n'est pas un nombre rationnel
2. Montrer que $x = 31,72356356356...$ est un rationnel.

Exercice 03 :
rappelle que $\sqrt{2}$ est irrationnel.

1. Montrer que $\alpha = 6 + 4\sqrt{2}$, $\beta = 6 - 4\sqrt{2}$ sont irrationnels.
2. Calculer $\sqrt{\alpha\beta}$
3. Montrer que $\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}$ est rationnel

Exercice 04 : Soient $x, y \in \mathbb{R}$, montrer que :

1. $f(x) = \lfloor x \rfloor$ est une fonction croissante.
2. $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leq \lfloor x + y \rfloor \leq \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1$
3. $\forall n \in \mathbb{N}^*$; $\left\lfloor \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor$.

(**Remarque :**-Le symbole $\lfloor x \rfloor$ désigne la partie entière de x)

Exercice 05 :
Soient A et B deux parties non-vides et bornées de $\mathbb{R}$. On note -A= $\{-x/x \in \mathrm{A}\}$. Montrer que :

1. $\sup(-\mathrm{A}) = -\inf(\mathrm{A})$.
2. $\inf(-\mathrm{A}) = -\sup(\mathrm{A})$.
3. Si $\mathrm{A} \subset \mathrm{B}$ alors :
$$\begin{cases} \sup(\mathrm{A}) \leq \sup(\mathrm{B}) \\ \\ \inf(\mathrm{B}) \leq \inf(\mathrm{A}) \end{cases}$$
4. $\sup(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) = \max(\sup(\mathrm{A}), \sup(\mathrm{B}))$
5. $\inf(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) = \min(\inf(\mathrm{A}), \inf(\mathrm{B}))$

Exercice 06 :
Determiner (s'ils existent) la borne inférieure, la borne supérieure, le plus petit élément et le plus grand élément des ensemble suivants :

1. $\mathrm{A}_1 = [1, 2] \cap \mathbb{Q}$
2. $\mathrm{A}_2 = [1, 2[\cap \mathbb{Q}$
3. $\mathrm{A}_3 = \{u_n = (-1)^n + \frac{1}{n+1} / n \in \mathbb{N}\}$
4. $\mathrm{A}_4 = \{x \in \mathbb{R} / x^2 < 1\}$
5. $\mathrm{A}_5 = \{x \in \mathbb{R} / -1 < \frac{2x}{x^2+1} < 1\}$
6. $\mathrm{A}_6 = \{u_n = \sin\left(\frac{2n\pi}{7}\right) / n \in \mathbb{Z}\}$

Exercice 07 :
Soient $a, b \in \mathbb{Q}$, tel que $a < b$. Montrer que :
$$\exists c \in \mathbb{Q};\ a < c < b$$