Université de Batna 2
Faculté des Mathématiques et d'informatique
Département Socle Commun Mathématiques et Iformatique
1re année MI
Année Universitaire 2020/2021

Série de Td N :-02 (Suites de nombres réels)

Exercice 01 :
Etudier la nature des suites suivantes, et determiner leur limite éventuelle :

1. $u_n = \dfrac{\sin(n) + 3\cos(n^2)}{\sqrt{n}}$
2. $u_n = \dfrac{2n + (-1)^n}{5n + (-1)^{n+1}}$
3. $u_n = \dfrac{a^n - b^n}{a^n + b^n} / \, a, b \in]0, +\infty[$
4. $u_n = \ln(2n^2 - n) - \ln(3n + 1)$
5. $u_n = \left(\dfrac{n - x}{n + x}\right)^n / \, x \in \mathbb{R}$
6. $u_n = \dfrac{1}{n!} \sum\limits_{k=1}^{n} \mathrm{k}!$

Exercice 02 :
Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ la suite définie par :

$$u_n = \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)\left(1 + \frac{2}{n^2}\right) \ldots\ldots. \left(1 + \frac{n}{n^2}\right)$$

On pose : $v_n = \ln(u_n)$

1. Montrer pour tout $x \geq 0$, l'inégalité suivante :

$$x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1 + x) \leq x$$

2. déduir que :

$$\frac{n+1}{2n} - \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^3} \leq v_n \leq \frac{n+1}{2n}$$

On admettra que :

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

3. Montrer que $(v_n)_{n\geq 1}$ converge, et préciser sa limite.
4. Montrer que $(u_n)_{n\geq 1}$ converge, et préciser sa limite.

Exercice 03 :
En utilisant les inégalités suivantes :

$$2(\sqrt{n+1} - 1) < \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \ldots. + \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n} / \, n \in \mathbb{N}^*$$

Prouver la convergence des suites suivantes :

1. $a_n = -2\sqrt{n} + (\dfrac{1}{\sqrt{1}} + \dfrac{1}{\sqrt{2}} \ldots. + \dfrac{1}{\sqrt{n}})$
2. $b_n = -2\sqrt{n+1} + (\dfrac{1}{\sqrt{1}} + \dfrac{1}{\sqrt{2}} \ldots. + \dfrac{1}{\sqrt{n}})$

Exercice 04 :
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par :

$$u_n = \frac{n+1}{2n}$$

1. Montrez que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers $\dfrac{1}{2}$
2. Trouvez un entier $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que tous les termes u_n, d'indice $n \geq n_0$ sont dans l'intervalle $I =]0.49, 0.51[$.

Exercice 05 :
Pour tout n non nul, on considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :

$$u_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots.. + \frac{1}{n}$$

1. Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante.
2. Calculer $u_{2n} - u_n$.
3. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est divergente.

Exercice 06 :

1. Etudier la fonction $f(x) = \dfrac{x^2 + a^2}{2x} / \, a > 0$
2. Déduire la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R}_+^* \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(u_n + \dfrac{a^2}{u_n}\right). \end{cases}$$

Exercice 07 :
Calculer les limites des suites suivantes :

1. $\lim\limits_{n\to+\infty} (\sqrt[n]{1^2 + 2^2 + ...n^2})$
2. $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{n + \sin(n^2)}{n + \cos(n)}\right)$
3. $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$
4. $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n}{2^{\sqrt{n}}}$
5. $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n!}{2^{n^2}}$
6. $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}} \left(\dfrac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{3}} + \dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{5}} + ... + \dfrac{1}{\sqrt{2n-1}+\sqrt{2n+1}}\right)$
7. $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{1}{n^2+1} + \dfrac{2}{n^2+2} + ... + \dfrac{n}{n^2+n}\right)$

Exercice 08 :
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite définie par : $u_n = (-1)^n$

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas de cauchy dans $\mathbb{R}$.
2. Est ce que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente ?
3. Peut on appliquer le théorème de Bolzano-Weistrass à cette suite
4. Trouver les valeurs d'adhérence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$
5. calculer $\limsup u_n$ et $\liminf u_n$