

Année Universitaire : 2021-2022

Département : S.CM.I

Module : Algèbre 1

Exercices sur le chapitre 2

Ex1 Soient A, B et C trois parties d'un ensemble E non vide. Démontrer que :

- 1) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
- 2) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

Ex2 Soient A et B deux parties d'un ensemble E non vide. On appelle différence symétrique de A et B, notée $A \Delta B$, l'ensemble défini par :

$A \Delta B = (A \cap \bar{B}) \cup (B \cap \bar{A})$ où \bar{A} est le complémentaire de A dans E et \bar{B} est le complémentaire de B dans E.

- 1) Déterminer les ensembles $A \Delta E$, $A \Delta \emptyset$ et $A \Delta A$.
- 2) Montrer que l'opérateur Δ est commutatif.

Ex3 Soit $f : E \rightarrow F$ une application

- 1) Soient A_1, A_2 deux sous-ensembles de E. Démontrer que :
 - a) $A_1 \subset A_2 \Rightarrow f(A_1) \subset f(A_2)$
 - b) $f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2)$. Montrer par un contre-exemple que : $f(A_1) \cap f(A_2) \not\subset f(A_1 \cap A_2)$
 - c) $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$
- 2) Soient B_1, B_2 deux sous-ensembles de F. Démontrer que :
 - a) $B_1 \subset B_2 \Rightarrow f^{-1}(B_1) \subset f^{-1}(B_2)$
 - b) $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$
 - c) $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$

Ex4 En utilisant les définitions de la surjection, de l'injection et de la bijection d'une application, dire si les applications suivantes sont surjectives, injectives et bijectives ?

1) $f : [-1, +1] \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto f(x) = \sqrt{1 - x^2}$

2) $g : \mathbb{R} \rightarrow [-3, +\infty[$
 $x \mapsto g(x) = x^2 + 4x + 1$

3) $h : [0, +\infty[\rightarrow [1, +\infty[$
 $x \mapsto h(x) = 3x^2 + 4x + 1$