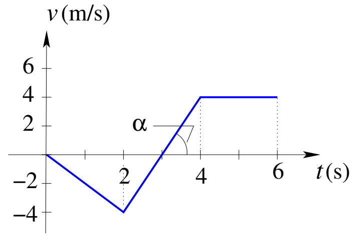
TD n° 2 - Solution —— Janvier 2021

Exercice 1 :

a) La vitesse s'annule à $t = 0\,\text{s}$ et $t = 3\,\text{s}$. b) La particule inverse le sens de son mouvement à $t = 3\,\text{s}$ (car elle passe de $-$ à $+$ à $t = 3\,\text{s}$). c) $a_{moy} = \Delta v/\Delta t = (v(4) - v(1))/(4-1) = (4-(-2))/3 = 6/3 = 2\,\text{m/s}^2$. d) L'accélération à un intant t quelconque est donnée par la pente de $v(t)$ à l'intant t. Donc l'accélération à $t = 3\,\text{s}$ vaut (voir figure) $a = \tan\alpha = 4/1 = 4\,\text{m/s}^2$.



Exercice 2 :

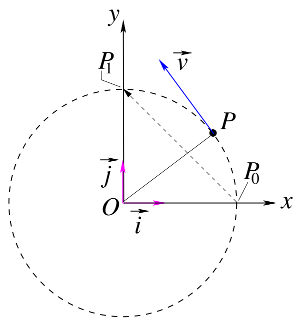
On a : $v_{moy} = \dfrac{\Delta x}{\Delta t}$, $\Delta x = 80\,\text{km}$ et $\Delta t = \dfrac{40\,\text{km}}{30\,\text{km/h}} + \dfrac{40\,\text{km}}{60\,\text{km/h}} = 2\,\text{h}$. Donc $v_{moy} = \dfrac{80\,\text{km}}{2\,\text{h}} = 40\,\text{km/h}$.

Exercice 3 :

a) Durant les 5 premières secondes (i.e. $\Delta t = 5\,\text{s}$), la particule effectue un quart de tour et se déplace donc de P_0 à P_1, autrement dit $\Delta\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{P_0P_1} = \overrightarrow{P_0O} + \overrightarrow{OP_1} = -r\vec{i} + r\vec{j} = 5(-\vec{i}+\vec{j})\,\text{m}$.

$$\text{On a } \vec{v}_{moy} = \frac{\Delta\overrightarrow{OP}}{\Delta t} = \frac{5(-\vec{i}+\vec{j})\,\text{m}}{5\,\text{s}} = (-\vec{i}+\vec{j})\,\text{m/s}.$$

La vitesse vaut (en module) $v_{moy} = \sqrt{2}\,\text{m/s}$ et est dirigée à $\theta = \tan^{-1}(v_y/v_x) = \tan^{-1} -1$, soit $\theta = 135°$ de l'axe x.



Remarque : On parle ici du vecteur vitesse moyen qui est donné par le vecteur déplacement divisée par le temps mis pour faire le déplacement. Sachez (voir cours) qu'on définit aussi une vitesse scalaire moyenne qui est donnée par la distance parcourue divisée par le temps mis pour parcourir cette distance. Ici la distance parcourue durant les 5 premières secondes vaut 1/4 de cercle, soit $2\pi r/4 = 7.85\,\text{m}$. La vitesse scalaire moyenne est donc : $7.85/5 = 1.57\,\text{m/s}$.

b) Durant les 25 premières secondes, la particule effectue un tour et un quart et se retrouve à nouveau en P_1, autrement dit elle a effectué le même (vecteur) déplacement qu'à la question précédente mais avec $\Delta t = 25\,\text{s}$. Donc

$$\vec{v}_{moy} = \frac{5(-\vec{i}+\vec{j})\,\text{m}}{25\,\text{s}} = \frac{1}{5}(-\vec{i}+\vec{j})\,\text{m}/s.$$

On peut aussi répondre $v_{moy} = \frac{\sqrt{2}}{5}\,\text{m/s}$, dirigée à 135°de l'axe x.

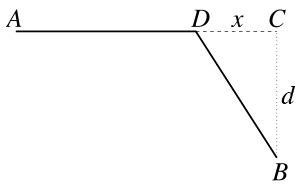
Exercice 4 : On a : $\vec{r} = \vec{i} + 4t^2\,\vec{j} + t\,\vec{k}$ $\rightarrow$ a) $\vec{v} = d\vec{r}/dt = 8t\,\vec{j} + \vec{k}$, $\vec{a} = d\vec{v}/dt = 8\,\vec{j}$.
b) Le vecteur $\vec{r}$ s'écrit $\vec{r} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}$ avec $x = 1, y = 4t^2$ et $z = t$. On élimine t et on obtient : $x = 1$ et $y = 4z^2$. C'est une parabole située dans le plan $x = 1$, de sommet $(x = 1, y = 0, z = 0)$ et qui a pour axe la droite $(z = 0$ et $x = 1)$.

Exercice 5 : a) $v_1 = 90 \times 1000/3600\,\text{m/s} = 25\,\text{m/s}$, $v_2 = 54 \times 1000/3600\,\text{m/s} = 15\,\text{m/s}$.
b) $v_2^2 - v_1^2 = 2a(x_2 - x_1) \Longrightarrow a = (v_2^2 - v_1^2)/[2(x_2 - x_1)] \rightarrow a = (15^2 - 25^2)/(2 \times 80) = (225 - 625)/160 = -2.5\,\text{m/s}^2$. L'accélération a une grandeur de 2.5 m/s^2, son signe $-$ indique qu'elle a un sens opposé à celui de la vitesse (ce qui est normal puisque c'est une phase de décélération). c) Si t_1 et t_2 désignent le début et la fin de la phase de décélération, la durée de la décélération est $\Delta t_{21} = t_2 - t_1$. On sait que durant

cette phase la vitesse de la camionnette est donnée par (voir cours : mouvement rectiligne uniformément décéléré) : $v = a(t - t_1) + v_1$. On a alors : $v_2 = a(t_2 - t_1) + v_1 = a\Delta t_{21} + v_1 \Longrightarrow \Delta t_{21} = (v_2 - v_1)/a$ soit, $\Delta t_{21} = (15 - 25)/(-2.5) = (-10)/(-2.5) = 4\,\mathrm{s}$

d) On va considérer la phase allant de t_2 jusqu'à l'instant $t = t_3$ où la comionnette s'immobilise complètement ($v(t_3) = 0$). Puisque la décélération est la même que dans la phase précédente, on a : $0^2 - v_2^2 = 2a(x_3 - x_2)$, x_3 désigne la position de la comionnette au temps t_3. La distance qui lui est nécessaire pour s'immobiliser complètement est donc : $\Delta x_{32} = (x_3 - x_2) = -v_2^2/2a = -15^2/(2 \times -2.5) = 45\,\mathrm{m}$. Durant cette phase la vitesse s'écrit : $v = a(t - t_2) + v_2$. Cette vitesse s'annule à $t = t_3$: $0 = a(t_3 - t_2) + v_2$. Le temps nécessaire à la comionnette pour s'immobiliser complètement est donc $\Delta t_{32} = (t_3 - t_2) = v_2/(-a) = 15/2.5 = 6\,\mathrm{s}$.

Exercice 6 :



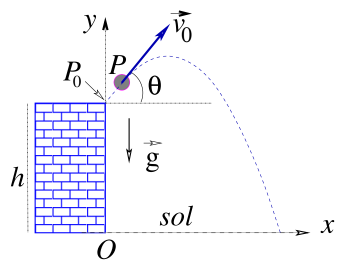
Le tronçon AD est parcouru avec la vitesse $2v$ en un temps $t_1 = (AC - x)/2v$. Le tronçon DB est parcouru avec la vitesse v en un temps $t_2 = DB/v = \sqrt{x^2 + d^2}/v$. Il faut trouver le minimum de $t_1 + t_2$ par rapport à x. On doit avoir pour cela :

$$\frac{d(t_1 + t_2)}{dx} = 0 \tag{1}$$

$$\frac{d(t_1 + t_2)}{dx} = \frac{dt_1}{dx} + \frac{dt_2}{dx} = \frac{-1}{2v} + \frac{1}{2v}\frac{2x}{\sqrt{x^2 + d^2}} \tag{2}$$

L'égalisation à 0 du résultat précédent conduit à : $2x = \sqrt{x^2 + d^2} \Longrightarrow 4x^2 = x^2 + d^2 \Longrightarrow 3x^2 = d^2 \Longrightarrow x = \pm d/\sqrt{3}$. Sachant que x est une distance (une distance est positive), on rejette la solution négative et on a donc $x = d/\sqrt{3}$.

Exercice 7 :



a) Par rapport au point de lancement P_0, la position du projectile P est donnée par $\overrightarrow{P_0P}$. Si on néglige la résistance de l'air, le projectile, une fois lancé, n'est soumis qu'à l'accélération $\vec{g}$ de la pesanteur. Donc $\vec{a} = \vec{g}$. Il s'ensuit que

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{g}\,t \tag{3}$$

$$\overrightarrow{P_0P} = \vec{v}_0\,t + \frac{1}{2}\vec{g}\,t^2 \tag{4}$$

Le cours sur les vecteurs nous a appris que quand un vecteur s'écrit sous forme d'une combinaison linéaire de deux vecteurs non colinéaires, il est forcément dans le plan formé par ces deux vecteurs. Donc $\overrightarrow{P_0P}$ est, à chaque instant, dans le plan de $\vec{v}_0$ et $\vec{g}$, autrement dit, le mouvement du projectile P s'effectue dans le plan $(\vec{v}_0, \vec{g})$, qu'on va appeler dans la suite le plan Oxy, l'origine O est au niveau du sol et Oy contient P_0 (voir figure).

b) Par rapport au repère Oxy, la position du projectile est : $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_0} + \overrightarrow{P_0P} = \overrightarrow{OP_0} + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2}\vec{g}t^2$. En projetant sur les axes x et y on a :

$$x = v_0 \cos\theta\, t \tag{5}$$

$$y = h + v_0 \sin\theta\, t - \frac{1}{2} g\, t^2 \tag{6}$$

L'envol se termine quand P arrive au sol, c'est-à-dire quand $y = 0$. On a alors

$$16 + 10.5t - 4.9t^2 = 0 \Longrightarrow t_{\mathrm{envol}} = \frac{-10.5 \pm \sqrt{10.5^2 - 4 \times (-4.9) \times 16}}{2 \times (-4.9)} = 3.17\,\mathrm{s};\ -1.03\,\mathrm{s} \tag{7}$$

On obtient deux solutions, une solution positive et une solution négative. La solution négative est physiquement rejetée car, après l'instant de lancement choisi comme origine des temps, t ne peut être que positif. Donc $t_{\text{envol}} = 3.17\,\text{s}$.

c) La portée horizontale R est donnée par la distance parcourue suivant x durant le vol :

$$R = v_0 \cos\theta\, t_{\text{envol}} = 21 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times 3.17 = 57.7\,\text{m}. \tag{8}$$

d) Quand P atteint sa hauteur maximale $h_{\max}$, sa vitesse suivant y s'annule. Pour calculer $h_{\max}$, on peut calculer le temps où $v_y = 0$, puis rempacer dans l'équation (6). Mais on peut faire plus simplement et plus rapidement en utilisant la relation (qui ne fait pas intervenir explicitement le temps t) entre le point de lancement et le sommet de la trajectoire : $0^2 - (v_0 \sin\theta)^2 = -2\text{g}(h_{\max} - h)$ d'où l'on tire

$$h_{\max} = h + \frac{(v_0 \sin\theta)^2}{2\text{g}} = 16 + \frac{(21 \times 0.5)^2}{2 \times 9.8} = 16 + 5.6 = 21.6\,\text{m}$$

e) La vitesse suivant x ne change pas et vaut à chaque instant $v_x = v_0 \cos\theta = 21 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 18.2\,\text{m}$. La vitesse v_y quand le projectile se trouve à 2 m (c'est-à-dire à $y = h + 2 = 16 + 2 = 18\,\text{m}$) au-dessus du toit est donnée par l'équation :

$$v_y^2 - (v_0 \sin\theta)^2 = -2\text{g}(18 - 16) = -4\text{g} \Longrightarrow v_y = \pm\sqrt{(v_0 \sin\theta)^2 - 4\text{g}} = \pm\sqrt{10.5^2 - 4 \times 9.8} = \pm 8.4\,\text{m}. \tag{9}$$

Il y a deux solutions pour v_y. Les deux sont valables, le projectile monte à 2 m au-dessus du toit, continue jusqu'au sommet de sa trajectoire et redescend pour se retrouver une deuxième fois à 2 m au-dessus de l'immeuble. Ceci mène donc à deux solutions pour la vitesse : $\vec{v}_1 = 18.2\vec{i} + 8.4\vec{j}$ et $\vec{v}_2 = 18.2\vec{i} - 8.4\vec{j}$. *Le projectile revient à la même hauteur avec la même vitesse (en module).*

f) Si $v_{x\text{sol}}$ et $v_{y\text{sol}}$ désignent les composantes de la vitesse au moment où P touche le sol, l'angle α entre $\vec{v}$ et l'axe x est tel que : $\tan\alpha = v_{y\text{sol}}/v_{x\text{sol}}$. Sachant $v_y = v_0 \sin\theta - \text{g}t$, il vient $v_{y\text{sol}} = v_0 \sin\theta - \text{g}t_{\text{envol}} = 10.5 - 9.8 \times 3.17 = -20.6\,\text{m} \rightarrow \tan\alpha = -20.6/18.2 = -1.13$, ce qui donne $\alpha = -48.5°$, autrement dit, 48.5° en dessous de l'axe horizontal x.