

Année universitaire : 2021-2022

Département : S.C.M.I

Module : Algèbre 1

Exercices sur le chapitre 3

Ex1 Sur l'ensemble des entiers relatifs \mathbb{Z} , on définit la relation binaire \mathcal{R} par :

$$x \mathcal{R} y \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : x-y=3k$$

- 1) Montrer que \mathcal{R} est une relation d'équivalence.
- 2) Déterminer les classes d'équivalence de zéro, un et deux.
- 3) Déterminer l'ensemble quotient $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.

Ex2 Soient E un ensemble non vide et \mathcal{R} une relation réflexive dans E telle que :

$$\forall x,y,z \in E, (x \mathcal{R} y \text{ et } y \mathcal{R} z) \Rightarrow (z \mathcal{R} x)$$

Montrer que \mathcal{R} est une relation d'équivalence.

Ex3 Sur \mathbb{N}^* , on définit la relation \mathcal{R} par :

$$a \mathcal{R} b \Leftrightarrow \exists q \in \mathbb{N}^* : b=q.a$$

- 1) Montrer que \mathcal{R} est une relation d'ordre.
- 2) L'ordre est-il total ?

Ex4 Sur l'ensemble des parties d'un ensemble non vide E, on définit la relation \mathcal{R} par :

$$A \mathcal{R} B \Leftrightarrow A \subset B$$

- 1) Montrer que \mathcal{R} est une relation d'ordre.
- 2) L'ordre est-il total ?